平面の合同変換と相似変換

岩瀬順一

要約：平面の合同変換と相似変換を論じる。いま大学で行列を学び始めている大学一年生を念頭に置いている。高等学校で行列や一次変換を学んでいなくてもよい。

1. 写像

定義 1.1 X, Y を集合とする。X の各元 x に対し Y のただ一つの元 y を対応させる規則 f を **写像** とよび，$f : X \to Y$ のように書く。f によって x に対応する Y の元を $f(x)$ と書く。よって，$y = f(x)$ のような書き方がなされる。y を f による x の **像** とよぶ。

例 1.2 $\mathbb{R}$ は実数全体の集合をあらわす慣用の記号である。$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $y = f(x) = x^2 + 2x - 1$ で定義することができる。$f(0) = -1$, $f(1) = 2$ である。

定義 1.3 集合 X から集合 Y への写像 $f : X \to Y$, 集合 X' から集合 Y' への写像 $g : X' \to Y'$ に対し $f = g$ であるとは，$X = X', Y = Y'$ であり，かつ，X のすべての元 x に対し $f(x) = g(x)$ が成り立つことをいう。$f = g$ のとき f と g とは等しいといい，そうでないとき，$f \neq g$ と書いて f と g とは異なるという。

2. 平面の一次変換

行列の積については既知とする。

定義 2.1 四つの実数 a, b, c, d を成分にもつ 2×2 行列

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

に対し，xy 平面上の点 (x, y) に，$x'y'$ 平面上の点 (x', y') を規則

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \left(= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix} \right)$$

に従って対応させる写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を，行列 A によって定まる（平面の）**一次変換** という。($\mathbb{R}^2$ は実数二つの組全体を意味するので，平面のことである。)

A によって定まる一次変換によって，点 (x, y) は点 $(ax + by, cx + dy)$ に写る。

行列 A を，f をあらわす行列とよぶ。

点 $(1, 0)$ は点 (a, c) に，点 $(0, 1)$ は点 (b, d) に写るから，行列 A と行列 B とが等しくなければ，行列 A によって定まる一次変換と行列 B によって定まる一次変換とは異なる写像である。

点 (x, y), (x', y') を列ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x'} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ であらわし，$\boldsymbol{x'} = A\boldsymbol{x}$ と書くこともある。

問 2.2 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ によって定まる一次変換によって，xy 平面上の点 $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,1)$, $(0,2)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$, $(1,1)$, $(2,2)$ はどのような点に写るか。$x'y'$ 平面に図示せよ。

$A(\mathbf{0})=\mathbf{0}$, $A(2\boldsymbol{x})=2A\boldsymbol{x}$, $A(-\boldsymbol{x})=-A\boldsymbol{x}$, $A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=A\boldsymbol{x}+A\boldsymbol{y}$ が成り立っていることを，この例で確認せよ。($\mathbf{0}$ は零ベクトルのことである。)

定義 2.3 写像 $f:X\to X$ で X のすべての元に対し $f(x)=x$ をみたすものを **恒等写像** といい，ふつう，id とあらわす。集合 X から X 自身への恒等写像であることを強調する場合には id_X と書く。すなわち，$\mathrm{id}_X:X\to X$ は X のすべての元 x に対し $\mathrm{id}_X(x)=x$ とおくことで定まる写像である。

命題 2.4 単位行列 $E=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ によって定まる一次変換は恒等写像である。

証明 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ だから，$x'=x$ かつ $y'=y$ である。 □

定義 2.5 $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ を写像とする。このとき，$(g\circ f)(x)=g(f(x))$ で定まる写像 $(g\circ f):X\to Z$ を，f と g との **合成** という。

命題 2.6 A, B を 2×2 行列とする。A によって定まる一次変換 $\boldsymbol{x}'=A\boldsymbol{x}$ を $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, B によって定まる一次変換 $\boldsymbol{x}''=B\boldsymbol{x}'$ を $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ とするとき，写像 $g\circ f$ は行列 BA で定まる一次変換である。

証明 $\boldsymbol{x}'=A\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x}''=B\boldsymbol{x}'$ に代入すれば $\boldsymbol{x}''=B(A\boldsymbol{x})=(BA)\boldsymbol{x}$ を得る。 □

一般には $AB\neq BA$ なので，一般には $g\circ f$ と $f\circ g$ とは異なる。

問 2.7 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ とすると $AB\neq BA$ であることを確かめよ。また，$g\circ f\neq f\circ g$ を確かめよ。

定義 2.8 行列 A に対し，$AA^{-1}=A^{-1}A=E$ をみたす行列 A^{-1} を A の **逆行列** という。

問 2.9 行列 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ が $ad-bc\neq 0$ をみたしているとする。このとき，行列

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

は A の **逆行列** であることを示せ。($ad-bc$ を A の **行列式** とよぶ。)

定義 2.10 写像 $f:X\to Y$ に対し，写像 $g:Y\to X$ で $g\circ f=\mathrm{id}_X$, $f\circ g=\mathrm{id}_Y$ をみたすものが存在するとき，g を f の **逆写像** といい，記号 f^{-1} であらわす。

命題 2.11 逆行列をもつ行列 A によって定まる一次変換 f には逆写像が存在する。それは A^{-1} によって定まる一次変換である。

証明 問 2.9 により，A^{-1} は $AA^{-1}=A^{-1}A=E$ をみたす。$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}'$ とすると $\boldsymbol{x}'=A\boldsymbol{x}$ であり，両辺に左から A^{-1} をかけると $A^{-1}\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}$ となる。A^{-1} によって定まる一次変換を g とすると $g(\boldsymbol{x}')=\boldsymbol{x}$ を得る。このことから $g\circ f=\mathrm{id}$, $f\circ g=\mathrm{id}$ がわかる。 □

逆行列・逆写像は，必ずしも存在するとは限らない。

命題 2.12 $ad-bc=0$ をみたす行列 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ には逆行列が存在しない。

証明 もしも逆行列が存在すれば，命題 2.11 により，その行列のあらわす一次変換は A のあらわす一次変換 f の逆写像である。一次変換 f に逆写像が存在するためには，「$f(\boldsymbol{x})=f(\mathbf{0})$ $(=\mathbf{0})$ ならば $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$」が成り立たねばならない。

もしも $a=b=c=d$ ならば任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $f(\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$ となり，逆行列は存在しない。

そうでなければ，$\begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix}$ か $\begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix}$ のいずれかは $\mathbf{0}$ ではない。$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix}=\mathbf{0}$, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix}=\mathbf{0}$ であるから，結論を得る。 □

以上をまとめて，次を得た。

命題 2.13 行列 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ が逆行列をもつための必要十分条件は $ad-bc\neq 0$ である。

3. 原点を中心とする回転をあらわす行列

α を実数とし，行列 $A=\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ によって定まる一次変換を考える。

問 3.1 $\alpha=\pi/6$ として，問 2.2 と同じことを，上の行列 A によって定まる一次変換について確かめよ。

命題 3.2 極座標で (r,θ) とあらわされる点の，行列 $A=\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ によって定まる一次変換による像を極座標で書くと $(r,\theta+\alpha)$ である。

証明 極座標で (r,θ) とあらわされる点は，直交座標であらわせば $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ である。その像は

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r(\cos\alpha\cos\theta-\sin\alpha\sin\theta) \\ r(\sin\alpha\cos\theta+\cos\alpha\sin\theta) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r\cos(\alpha+\theta) \\ r\sin(\alpha+\theta) \end{bmatrix}$$

と直交座標であらわされ，最右辺を極座標であらわせば $(r,\theta+\alpha)$ となる。 □

このことから，この一次変換は，原点を中心とする，角 α だけの回転であることがわかる。

問 3.3 原点を中心とする，次の角度だけの回転をあらわす行列を求めよ。0, $\pi/2$, π, $3\pi/2$, 2π. また，$\pm\pi/6$, $\pm\pi/4$, $\pm\pi/3$, $\pm 2\pi/3$.

注 3.4 原点を中心とする，角 β だけの回転と，原点を中心とする，角 α だけの回転との合成は，原点を中心とする，角 $\alpha+\beta$ だけの回転である。行列を用いてこの事実を記述すると，sin と cos の加法定理が得られる。

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$

となるはずである。左辺のかけ算を実行すると

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix}$$

を得る。これを右辺と比べればよい。

問 3.5 角 $5\pi/12$, $7\pi/12$ だけの回転をあらわす行列を求めよ。

命題 3.6 原点を中心とする，角 α だけの回転の逆写像は，原点を中心とする，角 $-\alpha$ だけの回転である。

証明

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix}$$

である。命題 2.11 を参照。 □

4. 平面の合同変換で平面を裏返さないもの

定義 4.1 $\mathbb{R}^2$ の二点 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ と $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ との距離は $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ であらわされる。これを $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ と書く。

定義 4.2 写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が **合同変換** であるとは，f が任意の二点の間の距離を変えないことをいう。すなわち，任意の $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ に対し $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}))$ が成り立つことをいう。

命題 4.3 原点を中心とする，角 α だけの回転は，合同変換である。

証明 点 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ の像は $\boldsymbol{x}' = (x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha, x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha)$ であり，点 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ の像は $\boldsymbol{y}' = (y_1\cos\alpha - y_2\sin\alpha, y_1\sin\alpha + y_2\cos\alpha)$ である。

$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$ である。$d(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}')^2 = ((x_1 - y_1)\cos\alpha - (x_2 - y_2)\sin\alpha)^2 + ((x_1 - y_1)\sin\alpha + (x_2 - y_2)\cos\alpha)^2$ は計算すれば $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2$ に等しいことがわかる。 □

定義 4.4 $\boldsymbol{p}$ を平面ベクトルとする。位置ベクトルが $\boldsymbol{x}$ である点に位置ベクトルが $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}$ である点を対応させる写像を，ベクトル $\boldsymbol{p}$ だけの **平行移動** という。

問 4.5 ベクトル $(2, -1)$ だけの平行移動で，次の点はどのような点に写るか。$(0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(-1, 0)$.

問 4.6 $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$ ならば，ベクトル $\boldsymbol{p}$ だけの平行移動は一次変換でないことを示せ。($\boldsymbol{0}$ は零ベクトルのことである。)

命題 4.7 ベクトル $\boldsymbol{p}$ だけの平行移動は，合同変換である。

証明 $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2)$ とすれば，点 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ の像は $\boldsymbol{x}' = (x_1 + p_1, x_2 + p_2)$ であり，点 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ の像は $\boldsymbol{y}' = (y_1 + p_1, y_2 + p_2)$ である。$d(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}')^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$ であり，これは $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2$ に等しい。 □

命題 4.8 ベクトル $\boldsymbol{p}$ だけの平行移動の逆写像はベクトル $-\boldsymbol{p}$ だけの平行移動である。

証明 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}$ より $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' + (-\boldsymbol{p})$ を得る。 □

補題 4.9 二つの合同変換の合成写像は，合同変換である。

証明 f, g を合同変換とすると，$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}))$, $d(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}') = d(g(\boldsymbol{x}'), g(\boldsymbol{y}'))$ が成り立つ。$\boldsymbol{x}' = f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{y}' = f(\boldsymbol{y})$ とおくと，$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = d(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}') = d(g(\boldsymbol{x}'), g(\boldsymbol{y}')) = d((g \circ f)(\boldsymbol{x}), (g \circ f)(\boldsymbol{y}))$ が成り立つ。 □

問 4.10 行列 $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ と平面ベクトル $\boldsymbol{p}$ に対し，写像 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}$ は，写像 $f_1(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と写像 $g(\boldsymbol{x}') = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{p}$ との合成 $g \circ f_1$ であることを示せ。また，写像 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}$ が合同変換であることを示せ。

問 4.11 行列 A, B を，それぞれ，原点を中心とする，角 α, β だけの回転をあらわす行列とし，$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ を平面ベクトルとする。写像 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}$, $g(\boldsymbol{x}') = A\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{q}$ に対し，$g \circ f$ を $(g \circ f)(\boldsymbol{x}) = C\boldsymbol{x} + \boldsymbol{r}$ の形にあらわせ。行列 C はどのような行列か?

問 4.12 問 4.10 の合同変換 f の逆写像を求めよ。

定義 4.13 写像 $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を平面の合同変換とする。$\mathbb{R}^2$ の三つの点 $O(0,0)$, $E_1(1,0)$, $E_2(0,1)$ を考える。このとき，平行移動 g' が存在して $(g' \circ \Phi(O)) = O$ が成り立つ。また，原点を中心とする回転 f' で，$(f' \circ g' \circ \Phi)(E_1) = E_1$ となるものが存在する。もちろん，$(f' \circ g' \circ \Phi)(O) = O$ である。写像 $f' \circ g' \circ \Phi$ は合同変換なので，$(f' \circ g' \circ \Phi)(E_2)$ は E_2 であるか，$E_2'(0,-1)$ であるかのどちらかである。
前者のとき Φ は平面を **裏返さない** といい，後者のとき Φ は平面を **裏返す** という。

命題 4.14 写像 $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を，平面の合同変換で，平面を裏返さないものとする。このとき，原点を中心とする回転 f と平行移動 g が存在して $g \circ f = \Phi$ が成り立つ。

すなわち，行列 $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ と平面ベクトル $\boldsymbol{p}$ が存在し，$\Phi(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}$ と書ける。

証明 定義 4.13 の中の g', f' を考える。$f' \circ g' \circ \Phi$ を Ψ とおくと，Ψ は平面の合同変換で，$\Psi(O) = O$, $\Psi(E_1) = E_1$, $\Psi(E_2) = E_2$ をみたす。

$\Psi(x, y) = (x', y')$ とおく。$d((x', y'), (0,0)) = d((x, y), (0,0))$ より

$$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2,$$

$d((x', y'), (1,0)) = d((x, y), (1,0))$ より

$$(x' - 1)^2 + y'^2 = (x - 1)^2 + y^2,$$

$d((x', y'), (0,1)) = d((x, y), (0,1))$ より

$$x'^2 + (y' - 1)^2 = x^2 + (y - 1)^2$$

が成り立つ。これら三つの式から，$x' = x$, $y' = y$ がわかる。よって，$\Psi = \mathrm{id}$ である。
$f' \circ g' \circ \Phi = \mathrm{id}$ より，$\Phi = g'^{-1} \circ f'^{-1}$ である。f'^{-1} をあらわす行列を A, g'^{-1} の平行移動をあらわすベクトルを $\boldsymbol{p}$ ととればよい。 □

定義 4.15 写像 $f : X \to X$ に対し，X の元 x で $f(x) = x$ をみたすものを，f の **固定点** とよぶ。

命題 4.16 行列 $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ と平面ベクトル $\boldsymbol{p}$ に対し，合同変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}$ を考える。もしも $A \neq E$ ならば，f は固定点を持つ。

証明 $\boldsymbol{x}_0$ が f の固定点であるとすると，$A\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{p} = \boldsymbol{x}_0$ である。

$A\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{p} = E\boldsymbol{x}_0$ なので，$(E-A)\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{p}$ である。$E-A = \begin{bmatrix} 1-\cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & 1-\cos\alpha \end{bmatrix}$ であり，$(1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha = 1-2\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 2-2\cos\alpha = 2(1-\cos\alpha) \neq 0$ であるから，この行列は逆行列をもつ。$\boldsymbol{x}_0 = (E-A)^{-1}\boldsymbol{p}$ は f の固定点である。 □

練習 4.17 写像 $f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2}-1 \end{bmatrix}$ の固定点を求めよ。

命題 4.18 命題 4.16 の合同変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}$ は $A \neq E$ ならば固定点 $\boldsymbol{x_0}$ をもつのだった。f は固定点 $\boldsymbol{x_0}$ のまわりの回転である。その回転角は，行列 A の回転角 α に等しい。

証明 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}$ から $\boldsymbol{x}_0 = A\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{p}$ を引くと $f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}_0 = A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$ が得られる。 □

定理 4.19 平面の合同変換で平面を裏返さないものは，平面のある点を中心とする回転であるか，平行移動である。

証明 命題 4.14 により，この合同変換は $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}$ と書ける。$A \neq E$ のときは，上に示したように，平面のある点を中心とする回転である。$A = E$ のときは，平行移動である。 □

5. 平面の合同変換で平面を裏返すもの

$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を，平面の合同変換で平面を裏返すものとする。$\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $\rho(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$ で定義すると，これは x 軸に関する折り返し写像なので合同変換であり，平面を裏返す。

$\Phi \circ \rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は，合同変換で，平面を裏返さない。よって，前節に述べたことにより，

$$(\Phi \circ \rho)(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}$$

と書ける。

$\rho(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$ だったので，上の式の左辺の $\boldsymbol{x}$ に $\rho(\boldsymbol{x})$ を，右辺の $\boldsymbol{x}$ に $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$ を代入すると，

$$(\Phi \circ \rho \circ \rho)(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}$$

を得る。$\rho \circ \rho = \mathrm{id}$ なので，

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}$$

を得る。

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$$

である。

この節の残りの部分では，記号 A でこの右辺の形の行列をあらわす。

命題 5.1 A に対し，$A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ をみたす長さ 1 のベクトル $\boldsymbol{v}$ と，$A\boldsymbol{v}^\perp = -\boldsymbol{v}^\perp$ をみたす長さ 1 のベクトル $\boldsymbol{v}^\perp$ が存在する。

証明 $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ とおくと，$A\boldsymbol{v} = E\boldsymbol{v}$ から，$(E - A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ である。

$$E-A = \begin{bmatrix} 1-\cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha & 1+\cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sin^2(\alpha/2) & -2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2) \\ -2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2) & 2\cos^2(\alpha/2) \end{bmatrix}$$

であるから，たとえば,

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha/2) \\ \sin(\alpha/2) \end{bmatrix}$$

ととればよい。

$A\boldsymbol{v}^\perp = -\boldsymbol{v}^\perp$ とおくと，$A\boldsymbol{v}^\perp = -E\boldsymbol{v}^\perp$ から $(E + A)\boldsymbol{v}^\perp = \boldsymbol{0}$ である。

$$E+A = \begin{bmatrix} 1+\cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & 1-\cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos^2(\alpha/2) & 2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2) \\ 2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2) & 2\sin^2(\alpha/2) \end{bmatrix}$$

であるから，たとえば,

$$\boldsymbol{v}^\perp = \begin{bmatrix} -\sin(\alpha/2) \\ \cos(\alpha/2) \end{bmatrix}$$

ととればよい。 □

この節の残りの部分では，$\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}^\perp$ は上の意味で用いる。$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{v}^\perp$ とは直交することに注意しよう。そのため，A によって定まる一次変換は $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{v}^\perp$ の像で決まる。

問 5.2 上の命題 5.1 から，A によって定まる一次変換は，ベクトル方程式 $t\boldsymbol{v}$ （t は実数）のあらわす直線に関する折り返しであることを示せ。

問 5.3 合同変換

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

はどのような写像であるかを考察せよ。次に，点 (a, b) $(a = 0, \pm1, \pm2,\ b = 0, \pm1, \pm2)$ をどのような点に写すかを調べよ。

命題 5.4 平面を裏返す合同変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}$ は，方向ベクトルが $\boldsymbol{v}$ である直線 $\boldsymbol{d} + t\boldsymbol{v}$ を，方向ベクトルが $\boldsymbol{v}$ である直線に写す。

証明 $A(\boldsymbol{d} + t\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{p} = A\boldsymbol{d} + t\boldsymbol{v} + \boldsymbol{p} = (A\boldsymbol{d} + \boldsymbol{p}) + t\boldsymbol{v}.$ □

命題 5.5 平面を裏返す合同変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}$ は，方向ベクトルが $\boldsymbol{v}$ である直線 $l : \boldsymbol{p}/2 + t\boldsymbol{v}$ を，l 自身に写す。

証明 まず，f が $l_0 : t\boldsymbol{v}$ を $l_1 : \boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v}$ に，l_1 を l_0 に写すことを観察せよ。このことから，l_0 と l_1 との中間にある l は l 自身に写されることが推測される。次に，これを正確に証明しよう。

$A(\boldsymbol{p}/2+t\boldsymbol{v})+\boldsymbol{p} = A(\boldsymbol{p}/2)+t\boldsymbol{v}+\boldsymbol{p} = (A(\boldsymbol{p}/2)+\boldsymbol{p})+t\boldsymbol{v}$ である。l は点 $\boldsymbol{p}/2$ を，$f(l)$ は点 $A(\boldsymbol{p}/2) + \boldsymbol{p}$ を通る。前者を始点，後者を終点とするベクトル $A(\boldsymbol{p}/2) + \boldsymbol{p/2}$ は，$\boldsymbol{p}/2 = \xi\boldsymbol{v}+\eta\boldsymbol{v}^\perp$ と分解すると，$A(\xi\boldsymbol{v}+\eta\boldsymbol{v}^\perp)+(\xi\boldsymbol{v}+\eta\boldsymbol{v}^\perp) = (\xi\boldsymbol{v}-\eta\boldsymbol{v}^\perp)+(\xi\boldsymbol{v}+\eta\boldsymbol{v}^\perp) = 2\xi\boldsymbol{v}$ となり，l の方向ベクトルと同じ方向を向いていることがわかる。

よって，f は l を l に写す。 □

注 5.6 ただし，一般には，f は l 上の点を固定するわけではない。l 上の点は，上の証明からわかるように，$2\xi\boldsymbol{v}$ だけ，l の上を移動する。

以上から，次が証明された。

定理 5.7 平面の合同変換で平面を裏返すものは，ある直線に関する折り返しと，その直線に沿った平行移動との合成である。

6. 平面の相似変換

定義 6.1 写像 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ が **相似変換** であるとは，ある正の実数 r が存在して，任意の二点 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ に対し $d(f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y}))=rd(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が成り立つことをいう。定数 r を **拡大率** という。$0<r<1$ のときは実際には縮小であるが，拡大率とよぶ。

注 6.2 任意の合同変換は，相似変換でもある。拡大率は 1 である。

写像 $r:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を $r(\boldsymbol{x})=r\boldsymbol{x}$ で定義する。拡大率 r の相似変換 f に対し，$f\circ r^{-1}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を考えると，これは合同変換であるから，前節までの結果により，$(f\circ r^{-1})(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}$ と書ける。

ここで，$A=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$ のとき f は平面を **裏返さない** といい，$A=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{bmatrix}$ のとき f は平面を**裏返す** という。

$r(\boldsymbol{x})=r\boldsymbol{x}$ だったので，左辺の $\boldsymbol{x}$ に $r(\boldsymbol{x})$ を，右辺の $\boldsymbol{x}$ に $r\boldsymbol{x}$ を代入すると $(f\circ r^{-1}\circ r)(\boldsymbol{x})=A(r\boldsymbol{x})+\boldsymbol{p}=rA\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}$ となり，$f(\boldsymbol{x})=rA\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}$ と得る。

命題 6.3 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を，平面を裏返さない，合同変換ではない相似変換とする。このとき，f は固定点をもつ。

証明 $f(\boldsymbol{x})=rA\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}$ であった。$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$ とおくと，$rA\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}=\boldsymbol{x}$ である。これから

$$\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-r\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p},$$

$$\begin{bmatrix}1-r\cos\alpha & r\sin\alpha\\ -r\sin\alpha & 1-r\cos\alpha\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}$$

となる。

もしもこの行列が逆行列をもたないとすると $0=(1-r\cos\alpha)^2+r^2\sin\alpha=1-2r\cos\alpha+r^2$ より

$$\cos\alpha=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)$$

となる。右辺は相加平均・相乗平均の関係から 1 以上となるが，ちょうど 1 になるのは $r=1/r$, すなわち $r=1$ の場合のみで，いまは不適となる。よって，$\cos\alpha>1$ となり，不合理である。このことは，上の行列が逆行列をもつことを示している。 □

定理 6.4 平面を裏返さない，合同変換でない相似変換は，固定点をもつ。この変換は，その点を中心とする回転と，その点を中心とする拡大・縮小との合成である。

証明 このような相似変換を f とする。命題 6.3 により，f は固定点 $\boldsymbol{x}_0$ をもつ。$f(\boldsymbol{x})=rA\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{x}_0=f(\boldsymbol{x}_0)=rA\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{p}$ より，$f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{x}_0=rA(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$ である。このことから結論が従う。 □

命題 6.5 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を，平面を裏返す，合同変換ではない相似変換とする。このとき，f は固定点をもつ。

証明 $f(\boldsymbol{x}) = rA\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}$ であった。$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ とおくと，$rA\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p} = \boldsymbol{x}$ である。これから

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - r \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix} \right) \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p},$$

$$\begin{bmatrix} 1 - r\cos\alpha & -r\sin\alpha \\ -r\sin\alpha & 1 + r\cos\alpha \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}$$

となる。

もしもこの行列が逆行列をもたないとすると $0 = (1 - r\cos\alpha)(1 + r\cos\alpha) - r^2\sin\alpha = 1 - r^2$ より $r = 1$ であるが，これは仮定に反する。このことは，上の行列が逆行列をもつことを示している。 □

定理 6.6 平面を裏返す，合同変換でない相似変換は，固定点をもつ。この変換は，その点を通るある直線に関する折り返しと，その点を中心とする拡大・縮小との合成である。

証明 このような相似変換を f とする。命題 6.5 により，f は固定点 $\boldsymbol{x}_0$ をもつ。$f(\boldsymbol{x}) = rA\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{x}_0 = f(\boldsymbol{x}_0) = rA\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{p}$ より，$f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}_0 = rA(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$ である。このことから結論が従う。 □

7. 発展 — 直線の合同変換，相似変換

以上にならって，直線の合同変換，相似変換を定義し，論じてみよ。

Departments of the School of Mathematics and Physics, College of Science and Engineering, Kanazawa University, Kakuma-machi, Kanazawa, 920-1192, Japan.

E-mail address: `iwase@staff.kanazawa-u.ac.jp`