# 平面の合同変換と相似変換

岩瀬順一

**要約**：平面の合同変換と相似変換を論じる。いま大学で行列を学び始めている大学一年生を念頭に置いている。高等学校で行列や一次変換を学んでいなくてもよい。

## 1. 写像

**定義 1.1**　$X, Y$ を集合とする。$X$ の各元 $x$ に対し $Y$ のただ一つの元 $y$ を対応させる規則 $f$ を **写像** とよび，$f: X \to Y$ のように書く。$f$ によって $x$ に対応する $Y$ の元を $f(x)$ と書く。よって，$y = f(x)$ のような書き方がなされる。$y$ を $f$ による $x$ の **像** とよぶ。

**例 1.2**　$\mathbb{R}$ は実数全体の集合をあらわす慣用の記号である。$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $y = f(x) = x^2 + 2x - 1$ で定義することができる。$f(0) = -1$, $f(1) = 2$ である。

**定義 1.3**　集合 $X$ から集合 $Y$ への写像 $f: X \to Y$, 集合 $X'$ から集合 $Y'$ への写像 $g: X' \to Y'$ に対し $f = g$ であるとは，$X = X'$, $Y = Y'$ であり，かつ，$X$ のすべての元 $x$ に対し $f(x) = g(x)$ が成り立つことをいう。$f = g$ のとき $f$ と $g$ とは等しいといい，そうでないとき，$f \neq g$ と書いて $f$ と $g$ とは異なるという。

## 2. 平面の一次変換

行列の積については既知とする。

**定義 2.1**　四つの実数 $a$, $b$, $c$, $d$ を成分にもつ $2 \times 2$ 行列

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

に対し，$xy$ 平面上の点 $(x, y)$ に，$x'y'$ 平面上の点 $(x', y')$ を規則

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \left( = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix} \right)$$

に従って対応させる写像 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を，行列 $A$ によって定まる（平面の） **一次変換** という。($\mathbb{R}^2$ は実数二つの組全体を意味するので，平面のことである。)

$A$ によって定まる一次変換によって，点 $(x, y)$ は点 $(ax + by, cx + dy)$ に写る。

行列 $A$ を，$f$ をあらわす行列とよぶ。

点 $(1, 0)$ は点 $(a, c)$ に，点 $(0, 1)$ は点 $(b, d)$ に写るから，行列 $A$ と行列 $B$ とが等しくなければ，行列 $A$ によって定まる一次変換と行列 $B$ によって定まる一次変換とは異なる写像である。

点 $(x, y)$, $(x', y')$ を列ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x'} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ であらわし，$\boldsymbol{x'} = A\boldsymbol{x}$ と書くこともある。

**問 2.2** $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ によって定まる一次変換によって，$xy$ 平面上の点 $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,1)$, $(0,2)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$, $(1,1)$, $(2,2)$ はどのような点に写るか。$x'y'$ 平面上に図示せよ。

$A(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $A(2\boldsymbol{x}) = 2A\boldsymbol{x}$, $A(-\boldsymbol{x}) = -A\boldsymbol{x}$, $A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y}$ が成り立っていることを，この例で確認せよ。($\mathbf{0}$ は零ベクトルのことである。)

**定義 2.3** 写像 $f : X \to X$ で $X$ のすべての元に対し $f(x) = x$ をみたすものを **恒等写像** といい，ふつう，id とあらわす。集合 $X$ から $X$ 自身への恒等写像であることを強調する場合には $\mathrm{id}_X$ と書く。すなわち，$\mathrm{id}_X : X \to X$ は $X$ のすべての元 $x$ に対し $\mathrm{id}_X(x) = x$ とおくことで定まる写像である。

**命題 2.4** 単位行列 $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ によって定まる一次変換は恒等写像である。

**証明** $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ だから，$x' = x$ かつ $y' = y$ である。 □

**定義 2.5** $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を写像とする。このとき，$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ で定まる写像 $(g \circ f) : X \to Z$ を，$f$ と $g$ との **合成** という。

**命題 2.6** $A$, $B$ を $2 \times 2$ 行列とする。$A$ によって定まる一次変換 $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ を $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $B$ によって定まる一次変換 $\boldsymbol{x}'' = B\boldsymbol{x}'$ を $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ とするとき，写像 $g \circ f$ は行列 $BA$ で定まる一次変換である。

**証明** $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x}'' = B\boldsymbol{x}'$ に代入すれば $\boldsymbol{x}'' = B(A\boldsymbol{x}) = (BA)\boldsymbol{x}$ を得る。 □

一般には $AB \neq BA$ なので，一般には $g \circ f$ と $f \circ g$ とは異なる。

**定義 2.7** 行列 $A$ に対し，$AA^{-1} = A^{-1}A = E$ をみたす行列 $A^{-1}$ を $A$ の **逆行列** という。

**問 2.8** 行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ が $ad - bc \neq 0$ をみたしているとする。このとき，行列

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

は $A$ の逆行列であることを示せ。

**定義 2.9** 写像 $f : X \to Y$ に対し，写像 $g : Y \to X$ で $g \circ f = \mathrm{id}_X$, $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ をみたすものが存在するとき，$g$ を $f$ の **逆写像** といい，記号 $f^{-1}$ であらわす。

**命題 2.10** 逆行列をもつ行列 $A$ によって定まる一次変換 $f$ には逆写像が存在する。それは $A^{-1}$ によって定まる一次変換である。

**証明** 問 2.8 により，$A^{-1}$ は $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ をみたす。$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}'$ とすると $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ であり，両辺に左から $A^{-1}$ をかけると $A^{-1}\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}$ となる。$A^{-1}$ によって定まる一次変換を $g$ とすると $g(\boldsymbol{x}') = \boldsymbol{x}$ を得る。このことから $g \circ f = \mathrm{id}$, $f \circ g = \mathrm{id}$ がわかる。 □

逆行列・逆写像は，必ずしも存在するとは限らない。

## 3. 原点を中心とする回転をあらわす行列

実数 $\alpha$ に対し，行列 $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ によって定まる一次変換を考える。

**問 3.1** $\alpha = \pi/6$ として，問 2.2 と同じことを，上の行列 $A$ によって定まる一次変換について確かめよ。

**命題 3.2** 極座標で $(r, \theta)$ とあらわされる点の，行列 $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ によって定まる一次変換による像を極座標で書くと $(r, \theta + \alpha)$ である。

**証明** 極座標で $(r, \theta)$ とあらわされる点は，直交座標であらわせば $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ である。その像は

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta) \\ r(\sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\alpha+\theta) \\ r\sin(\alpha+\theta) \end{bmatrix}$$

と直交座標であらわされ，最右辺を極座標であらわせば $(r, \theta + \alpha)$ となる。 □

このことから，この一次変換は，原点を中心とする，角 $\alpha$ だけの回転であることがわかる。

**問 3.3** 原点を中心とする，次の角度だけの回転をあらわす行列を求めよ。$0$, $\pi/2$, $\pi$, $3\pi/2$, $2\pi$. また，$\pm\pi/6$, $\pm\pi/4$, $\pm\pi/3$, $\pm 2\pi/3$.

**注 3.4** 原点を中心とする，角 $\beta$ だけの回転と，原点を中心とする，角 $\alpha$ だけの回転との合成は，原点を中心とする，角 $\alpha + \beta$ だけの回転である。行列を用いてこの事実を記述すると，sin と cos の加法定理が得られる。

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$

となるはずである。左辺のかけ算を実行すると

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix}$$

を得る。これを右辺と比べればよい。

**問 3.5** 角 $5\pi/12$, $7\pi/12$ だけの回転をあらわす行列を求めよ。

**命題 3.6** 原点を中心とする，角 $\alpha$ だけの回転の逆写像は，原点を中心とする，角 $-\alpha$ だけの回転である。

**証明** 自明。なお，命題 2.10 も参照。 □

## 4. 平面の合同変換で平面を裏返さないもの

**定義 4.1** $\mathbb{R}^2$ の二点 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ と $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ との距離は $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ であらわされる。これを $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ と書く。

**定義 4.2** 写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が **合同変換** であるとは，$f$ が任意の二点の間の距離を変えないことをいう。すなわち，任意の $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ に対し $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}))$ が成り立つことをいう。

**命題 4.3** 原点を中心とする，角 $\alpha$ だけの回転は，合同変換である。

**証明** 点 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ の像は $\boldsymbol{x}' = (x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha, x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha)$ であり，点 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ の像は $\boldsymbol{y}' = (y_1 \cos\alpha - y_2 \sin\alpha, y_1 \sin\alpha + y_2 \cos\alpha)$ である。

$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$ である。$d(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}')^2 = ((x_1 - y_1)\cos\alpha - (x_2 - y_2)\sin\alpha)^2 + ((x_1 - y_1)\sin\alpha + (x_2 - y_2)\cos\alpha)^2$ は計算すれば $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2$ に等しいことがわかる。 □

**定義 4.4** $\boldsymbol{p}$ を平面ベクトルとする。位置ベクトルが $\boldsymbol{x}$ である点に位置ベクトルが $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}$ である点を対応させる写像を，ベクトル $\boldsymbol{p}$ だけの **平行移動** という。

**問 4.5** ベクトル $(2, -1)$ だけの平行移動で，次の点はどのような点に写るか。$(0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(-1, 0)$.

**問 4.6** $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$ ならば，ベクトル $\boldsymbol{p}$ だけの平行移動は一次変換でないことを示せ。($\boldsymbol{0}$ は零ベクトルのことである。)

**命題 4.7** ベクトル $\boldsymbol{p}$ だけの平行移動は，合同変換である。

**証明** $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2)$ とすれば，点 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ の像は $\boldsymbol{x}' = (x_1 + p_1, x_2 + p_2)$ であり，点 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ の像は $\boldsymbol{y}' = (y_1 + p_1, y_2 + p_2)$ である。$d(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}')^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$ であり，これは $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2$ に等しい。 □

**命題 4.8** ベクトル $\boldsymbol{p}$ だけの平行移動の逆写像はベクトル $-\boldsymbol{p}$ だけの平行移動である。

**証明** $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}$ より $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' + (-\boldsymbol{p})$ を得る。 □

**補題 4.9** 二つの合同変換の合成写像は，合同変換である。

**証明** $f, g$ を合同変換とすると，$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}))$, $d(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}') = d(g(\boldsymbol{x}'), g(\boldsymbol{y}'))$ が成り立つ。$\boldsymbol{x}' = f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{y}' = f(\boldsymbol{y})$ とおくと，$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = d(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}') = d(g(\boldsymbol{x}'), g(\boldsymbol{y}')) = d((g \circ f)(\boldsymbol{x}), (g \circ f)(\boldsymbol{y}))$ が成り立つ。 □

**問 4.10** 行列 $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ と平面ベクトル $\boldsymbol{p}$ に対し，写像 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}$ は，写像 $f_1(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と写像 $g(\boldsymbol{x}') = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{p}$ との合成 $g \circ f_1$ であることを示せ。また，写像 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}$ が合同変換であることを示せ。

**問 4.11** 行列 $A$, $B$ を，それぞれ，原点を中心とする，角 $\alpha, \beta$ だけの回転をあらわす行列とし，$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ を平面ベクトルとする。写像 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}$, $g(\boldsymbol{x}') = B\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{q}$ に対し，$g \circ f$ を $(g \circ f)(\boldsymbol{x}) = C\boldsymbol{x} + \boldsymbol{r}$ の形にあらわせ。行列 $C$ はどのような行列か?

**問 4.12** 問 4.10 の合同変換 $f$ の逆写像を求めよ。

**定義 4.13** 写像 $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を平面の合同変換とする。$\mathbb{R}^2$ の三つの点 $O(0, 0)$, $E_1(1, 0)$, $E_2(0, 1)$ を考える。このとき，平行移動 $g'$ が存在して $(g' \circ \Phi(O)) = O$ が成り立つ。また，原点を中心とする回転 $f'$ で，$(f' \circ g' \circ \Phi)(E_1) = E_1$ となるものが存在する。もちろん，$(f' \circ g' \circ \Phi)(O) = O$ である。写像 $f' \circ g' \circ \Phi$ は合同変換なので，$(f' \circ g' \circ \Phi)(E_2)$ は $E_2$ であるか，$E_2'(0, -1)$ であるかのどちらかである。

前者のとき $\Phi$ は平面を **裏返さない** といい，後者のとき $\Phi$ は平面を **裏返す** という。

**命題 4.14** 写像 $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を，平面の合同変換で，平面を裏返さないものとする。このとき，原点を中心とする回転 $f$ と平行移動 $g$ が存在して $g \circ f = \Phi$ が成り立つ。

すなわち，行列 $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ と平面ベクトル $\boldsymbol{p}$ が存在し，$\Phi(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}$ と書ける。

**証明** 定義 4.13 の中の $g'$, $f'$ を考える。$f' \circ g' \circ \Phi$ を $\Psi$ とおくと，$\Psi$ は平面の合同変換で，$\Psi(O) = O$, $\Psi(E_1) = E_1$, $\Psi(E_2) = E_2$ をみたす。

$P$ を平面上の任意の点とし，$\Psi(P) = P'$ とおき，$P \neq P'$ と仮定する。$d(O,P) = d(O,P')$, $d(E_1,P) = d(E_1,P')$, $d(E_2,P) = d(E_2,P')$ なので，点 $O$, $E_1$, $E_2$ は線分 $PP'$ の垂直二等分線上にある。これは不合理である。よって，$\Psi(P) = P$, すなわち，$\Psi = \mathrm{id}$ である。

$f' \circ g' \circ \Phi = \mathrm{id}$ より，$\Phi = g'^{-1} \circ f'^{-1}$ である。$f'^{-1}$ をあらわす行列を $A$, $g'^{-1}$ の平行移動をあらわすベクトルを $\boldsymbol{p}$ ととればよい。 □

**定義 4.15** 写像 $f : X \to X$ に対し，$X$ の元 $x$ で $f(x) = x$ をみたすものを，$f$ の **固定点** とよぶ。

**命題 4.16** 行列 $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ と平面ベクトル $\boldsymbol{p}$ に対し，合同変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}$ を考える。もしも $A \neq E$ ならば，$f$ は固定点をもつ。

**証明** $\boldsymbol{x}_0$ が $f$ の固定点であるとすると，$A\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{p} = \boldsymbol{x}_0$ である。

$A\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{p} = E\boldsymbol{x}_0$ なので，$(E - A)\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{p}$ である。$E - A = \begin{bmatrix} 1 - \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & 1 - \cos\alpha \end{bmatrix}$ であり，$(1 - \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha = 1 - 2\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 2 - 2\cos\alpha = 2(1 - \cos\alpha) \neq 0$ であるから，この行列は逆行列をもつ。$\boldsymbol{x}_0 = (E - A)^{-1}\boldsymbol{p}$ は $f$ の固定点である。 □

**練習 4.17** 写像 $f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} - 1 \end{bmatrix}$ の固定点を求めよ。

**命題 4.18** 命題 4.16 において，$f$ は固定点 $\boldsymbol{x_0}$ のまわりの回転である。その回転角は，行列 $A$ に現れる角 $\alpha$ に等しい。

**証明** $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}$ から $\boldsymbol{x}_0 = A\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{p}$ を引くと $f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}_0 = A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$ が得られる。 □

**定理 4.19** 平面の合同変換で平面を裏返さないものは，平面のある点を中心とする回転であるか，平行移動である。

**証明** 命題 4.14 により，この合同変換は $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}$ と書ける。$A \neq E$ のときは，上に示したように，平面のある点を中心とする回転である。$A = E$ のときは，平行移動である。 □

## 5. 平面の合同変換で平面を裏返すもの

$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を，平面の合同変換で平面を裏返すものとする。$\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $\rho(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$ で定義すると，これは $x$ 軸に関する対称移動なので合同変換であり，平面を裏返す。

$\rho\circ\Phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ は，合同変換で，平面を裏返さない。よって，前節に述べたことにより，

$$(\rho\circ\Phi)(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}$$

と書ける。両辺に $\rho$ をほどこすと

$$(\rho\circ\rho\circ\Phi)(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{p}$$

となる。$\rho\circ\rho=\mathrm{id}$ なので，

$$\Phi(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{p}$$

を得る。

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ -\sin\alpha & -\cos\alpha\end{bmatrix}$$

である。ここで $\alpha$ を $-\alpha$ で置き換え，$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{p}$ を $\boldsymbol{p}$ と置き直すと，$\Phi(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}$ となる。この節の残りの部分では，記号 $A$ でこの形の行列をあらわす。

**命題 5.1** $A$ に対し，$A\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$ をみたす長さ 1 のベクトル $\boldsymbol{v}$ と，$A\boldsymbol{v}^\perp=-\boldsymbol{v}^\perp$ をみたす長さ 1 のベクトル $\boldsymbol{v}^\perp$ が存在する。

**証明** $A\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$ とおくと，$A\boldsymbol{v}=E\boldsymbol{v}$ から，$(E-A)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ である。

$$E-A=\begin{bmatrix}1-\cos\alpha & -\sin\alpha\\ -\sin\alpha & 1+\cos\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\sin^2(\alpha/2) & -2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)\\ -2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2) & 2\cos^2(\alpha/2)\end{bmatrix}$$

であるから，たとえば,

$$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}\cos(\alpha/2)\\ \sin(\alpha/2)\end{bmatrix}$$

ととればよい。

$A\boldsymbol{v}^\perp=-\boldsymbol{v}^\perp$ とおくと，$A\boldsymbol{v}^\perp=-E\boldsymbol{v}^\perp$ から $(E+A)\boldsymbol{v}^\perp=\boldsymbol{0}$ である。

$$E+A=\begin{bmatrix}1+\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & 1-\cos\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cos^2(\alpha/2) & 2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)\\ 2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2) & 2\sin^2(\alpha/2)\end{bmatrix}$$

であるから，たとえば,

$$\boldsymbol{v}^\perp=\begin{bmatrix}-\sin(\alpha/2)\\ \cos(\alpha/2)\end{bmatrix}$$

ととればよい。 □

この節の残りの部分では，$\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}^\perp$ は上の意味で用いる。$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{v}^\perp$ とは直交することに注意しよう。そのため，$A$ によって定まる一次変換は $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{v}^\perp$ の像で決まる。

**問 5.2** 上の命題 5.1 から，$A$ によって定まる一次変換は，ベクトル方程式 $t\boldsymbol{v}$ （$t$ は実数）のあらわす直線に関する対称移動であることを示せ。

**問 5.3** 合同変換

$$f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$$

はどのような写像であるかを考察せよ。次に，点 $(a,b)$ $(a=0,\ \pm1,\ \pm2,\ b=0,\ \pm1,\ \pm2)$ をどのような点に写すかを調べよ。

**命題 5.4** 平面を裏返す合同変換 $f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}$ は，方向ベクトルが $\boldsymbol{v}$ である直線 $\boldsymbol{d}+t\boldsymbol{v}$ を，方向ベクトルが $\boldsymbol{v}$ である直線に写す。

**証明** $A(\boldsymbol{d}+t\boldsymbol{v})+\boldsymbol{p}=A\boldsymbol{d}+t\boldsymbol{v}+\boldsymbol{p}=(A\boldsymbol{d}+\boldsymbol{p})+t\boldsymbol{v}$. □

**命題 5.5** 平面を裏返す合同変換 $f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}$ は，方向ベクトルが $\boldsymbol{v}$ である直線 $l:\boldsymbol{p}/2+t\boldsymbol{v}$ を，$l$ 自身に写す。

**証明** まず，$f$ が $l_0:t\boldsymbol{v}$ を $l_1:\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v}$ に，$l_1$ を $l_0$ に写すことを観察せよ。このことから，$l_0$ と $l_1$ との中間にある $l$ は $l$ 自身に写されることが推測される。次に，これを正確に証明しよう。

$A(\boldsymbol{p}/2+t\boldsymbol{v})+\boldsymbol{p}=A(\boldsymbol{p}/2)+t\boldsymbol{v}+\boldsymbol{p}=(A(\boldsymbol{p}/2)+\boldsymbol{p})+t\boldsymbol{v}$ である。$l$ は点 $\boldsymbol{p}/2$ を，$f(l)$ は点 $A(\boldsymbol{p}/2)+\boldsymbol{p}$ を通る。前者を始点，後者を終点とするベクトル $A(\boldsymbol{p}/2)+\boldsymbol{p/2}$ は，$\boldsymbol{p}/2=\xi\boldsymbol{v}+\eta\boldsymbol{v}^{\perp}$ と分解すると，$A(\xi\boldsymbol{v}+\eta\boldsymbol{v}^{\perp})+(\xi\boldsymbol{v}+\eta\boldsymbol{v}^{\perp})=(\xi\boldsymbol{v}-\eta\boldsymbol{v}^{\perp})+(\xi\boldsymbol{v}+\eta\boldsymbol{v}^{\perp})=2\xi\boldsymbol{v}$ となり，$l$ の方向ベクトルと同じ方向を向いていることがわかる。

よって，$f$ は $l$ を $l$ に写す。 □

**注 5.6** ただし，一般には，$f$ は $l$ 上の点を固定するわけではない。$l$ 上の点は，上の証明からわかるように，$2\xi\boldsymbol{v}$ だけ，$l$ の上を移動する。

以上から，次が証明された。

**定理 5.7** 平面の合同変換で平面を裏返すものは，ある直線に関する対称移動と，その直線に沿った平行移動との合成である。

## 6. 平面の相似変換

**定義 6.1** 写像 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ が **相似変換** であるとは，ある正の実数 $r$ が存在して，任意の二点 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ に対し $d(f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y}))=rd(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が成り立つことをいう。定数 $r$ を **拡大率** という。$0<r<1$ のときは実際には縮小であるが，拡大率とよぶ。

**注 6.2** 任意の合同変換は，相似変換でもある。拡大率は 1 である。

拡大率 $r$ の相似変換 $f$ に対し，写像 $\rho:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を $\rho(\boldsymbol{x})=r\boldsymbol{x}$ で定義する。$\rho^{-1}\circ f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を考えると，これは合同変換であるから，前節までの結果により，$(\rho^{-1}\circ f)(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}$ と書ける。

ここで，$A=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$ のとき $f$ は平面を **裏返さない** といい，$A=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{bmatrix}$ のとき $f$ は平面を**裏返す** という。

両辺に $\rho$ をほどこすと $(\rho\circ\rho^{-1}\circ f)(\boldsymbol{x})=rA\boldsymbol{x}+r\boldsymbol{p}$ となり，$\rho\circ\rho^{-1}=\mathrm{id}$ であるから $f(\boldsymbol{x})=rA\boldsymbol{x}+r\boldsymbol{p}$ を得る。$r\boldsymbol{p}$ を $\boldsymbol{p}$ と置き直すと，$f(\boldsymbol{x})=rA\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}$ となる。

**命題 6.3** $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を，平面を裏返さない，合同変換ではない相似変換とする。このとき，$f$ は固定点をもつ。

**証明** $f(\boldsymbol{x}) = rA\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}$ であった。$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ とおくと，$rA\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p} = \boldsymbol{x}$ である。これから

$$\left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - r \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \right) \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p},$$

$$\begin{bmatrix} 1 - r\cos\alpha & r\sin\alpha \\ -r\sin\alpha & 1 - r\cos\alpha \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}$$

となる。

もしもこの行列が逆行列をもたないとすると $0 = (1 - r\cos\alpha)^2 + r^2 \sin\alpha = 1 - 2r\cos\alpha + r^2$ より

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}\left( r + \frac{1}{r} \right)$$

となる。右辺は相加平均・相乗平均の関係から 1 以上となるが，ちょうど 1 になるのは $r = 1/r$, すなわち $r = 1$ の場合のみで，いまは不適となる。よって，$\cos\alpha > 1$ となり，不合理である。このことは，上の行列が逆行列をもつことを示している。 □

**定理 6.4** 平面を裏返さない，合同変換でない相似変換は，固定点をもつ。この変換は，その点を中心とする回転と，その点を中心とする拡大・縮小との合成である。

**証明** このような相似変換を $f$ とする。命題 6.3 により，$f$ は固定点 $\boldsymbol{x}_0$ をもつ。$f(\boldsymbol{x}) = rA\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{x}_0 = f(\boldsymbol{x}_0) = rA\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{p}$ より，$f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}_0 = rA(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$ である。このことから結論が従う。 □

**命題 6.5** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を，平面を裏返す，合同変換ではない相似変換とする。このとき，$f$ は固定点をもつ。

**証明** $f(\boldsymbol{x}) = rA\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}$ であった。$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ とおくと，$rA\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p} = \boldsymbol{x}$ である。これから

$$\left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - r \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix} \right) \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p},$$

$$\begin{bmatrix} 1 - r\cos\alpha & -r\sin\alpha \\ -r\sin\alpha & 1 + r\cos\alpha \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}$$

となる。

もしもこの行列が逆行列をもたないとすると $0 = (1 - r\cos\alpha)(1 + r\cos\alpha) - r^2 \sin^2\alpha = 1 - r^2$ より $r = 1$ であるが，これは仮定に反する。このことは，上の行列が逆行列をもつことを示している。 □

**定理 6.6** 平面を裏返す，合同変換でない相似変換は，固定点をもつ。この変換は，その点を通るある直線に関する対称移動と，その点を中心とする拡大・縮小との合成である。

**証明** このような相似変換を $f$ とする。命題 6.5 により，$f$ は固定点 $\boldsymbol{x}_0$ をもつ。$f(\boldsymbol{x}) = rA\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{x}_0 = f(\boldsymbol{x}_0) = rA\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{p}$ より，$f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}_0 = rA(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$ である。このことから結論が従う。 □

## 7. 発展 — 直線の合同変換，相似変換

以上にならって，直線の合同変換，相似変換を定義し，論じてみよ。

Departments of the School of Mathematics and Physics, College of Science and Engineering, Kanazawa University, Kakuma-machi, Kanazawa, 920-1192, Japan.
*E-mail address*: iwase@staff.kanazawa-u.ac.jp