1961 年京大理 $\boxed{1}$ 文 $\boxed{1}$ 共通

（i）

「（イ．すべての）実数に対し、そこで（ロ．すくなくとも一つ）の函数は 0 で（ハ．ない）。」

（ii）

まず、$\triangle ABC$ が $\triangle A'B'C'$ に対し裏返しであるとき、$\triangle ABC$ のいずれかの辺に関して、1 回対称移動する。

$\triangle ABC$ が $\triangle A'B'C'$ に対し裏返しでなければ、対称移動は行わない。

次に、頂点 A が頂点 A' と重なるように、$\triangle ABC$ を 1 回平行移動する。このとき、$\triangle ABC$ が $\triangle A'B'C'$ と一致していれば、回転移動は行わない。$\triangle ABC$ が $\triangle A'B'C'$ と一致していなければ、頂点 A を中心として、$\triangle ABC$ を 1 回回転移動させ、$\triangle A'B'C'$ と一致させればよい。

（iii）

すべての実数 x について、$f(x)=f(x-h)$ が成立すると仮定する。

$$(x-h)^2=x^2-2hx+h^2 \qquad (x-h)^3=x^3-3hx^2+3h^2x-h^3$$

$$(x-h)^4=(x-h)(x^3-3hx^2+3h^2x-h^3)=x^4-4hx^3+6h^2x^2-4h^3x+h^4$$

$$f(x-h)=x^4-4hx^3+6h^2x^2-4h^3x+h^4+a(x^3-3hx^2+3h^2x-h^3)+b(x^2-2hx+h^2)+c(x-h)+d$$

$$\begin{aligned}f(x)-f(x-h)&=4hx^3-6h^2x^2+4h^3x-h^4+a(3hx^2-3h^2x+h^3)+b(2hx-h^2)+ch\\&=4hx^3-(6h^2-3ah)x^2+(4h^3-3ah^2+2bh)x-(h^4-ah^3+bh^2-ch)\\&=h\left\{4x^3-(6h-3a)x^2+(4h^2-3ah+2b)x-(h^3-ah^2+bh-c)\right\}\end{aligned}$$

$h\neq 0$ であるから、すべての実数 x について $f(x)-f(x-h)=0$ となるには、すべての実数 x について

$$4x^3-(6h-3a)x^2+(4h^2-3ah+2b)x-(h^3-ah^2+bh-c)=0$$

が成立しなければならないが、少なくとも x^3 の係数が 0 ではないから、これは成立しない。

したがって、仮定は誤りであり、題意は示された。（証明終）