1962年京大文 $\boxed{6}$

$AC = A'C' = A''C'' = b$ とすると、 $AB = A'B' = A''B'' = pb$ である。

$\angle A' = \theta < \dfrac{\pi}{2},\ \angle A'' = \pi - \theta$ とすると

$$BC^2 = b^2 + p^2b^2 \quad BC = b\sqrt{1+p^2}$$

$$B'C'^2 = b^2 + p^2b^2 - 2b \cdot pb\cos\theta = b^2(1 - 2p\cos\theta + p^2) \quad B'C' = b\sqrt{1-2p\cos\theta + p^2}$$

$$B''C''^2 = b^2 + p^2b^2 - 2b \cdot pb\cos(\pi-\theta) = b^2(1 + 2p\cos\theta + p^2) \quad B''C'' = b\sqrt{1+2p\cos\theta + p^2}$$

$B''C'' - BC = p(BC - B'C')$ より

$$b(\sqrt{1+2p\cos\theta+p^2} - \sqrt{1+p^2}) = pb(\sqrt{1+p^2} - \sqrt{1-2p\cos\theta+p^2})$$

$b > 0$ であるから $(1+p)\sqrt{1+p^2} = \sqrt{1+2p\cos\theta+p^2} + p\sqrt{1-2p\cos\theta+p^2}$ 両辺2乗して

$$(1+2p+p^2)(1+p^2) = 1+2p\cos\theta+p^2+p^2(1-2p\cos\theta+p^2)+2p\sqrt{(1+p^2)^2-4p^2\cos^2\theta}$$

$$1+2p+2p^2+2p^3+p^4 = 1+2p\cos\theta+2p^2-2p^3\cos\theta+p^4+2p\sqrt{(1+p^2)^2-4p^2\cos^2\theta}$$

$$2p(1-\cos\theta)+2p^3(1+\cos\theta) = 2p\sqrt{(1+p^2)^2-4p^2\cos^2\theta}$$

$p > 0$ であるから $1-\cos\theta+p^2(1+\cos\theta) = \sqrt{(1+p^2)^2-4p^2\cos^2\theta}$ 両辺2乗して

$$1-2\cos\theta+\cos^2\theta+2p^2(1-\cos^2\theta)+p^4(1+2\cos\theta+\cos^2\theta) = 1+2p^2+p^4-4p^2\cos^2\theta$$

$$-2\cos\theta+\cos^2\theta+2p^2\cos^2\theta+p^4(2\cos\theta+\cos^2\theta) = 0$$

$$-2(1-p^4)\cos\theta+(1+2p^2+p^4)\cos^2\theta = -2(1-p^2)(1+p^2)\cos\theta+(1+p^2)^2\cos^2\theta = 0$$

$$(1+p^2)\cos\theta\left\{(1+p^2)\cos\theta-2(1-p^2)\right\} = 0$$

$\cos\theta \neq 0$ より $(1+p^2)\cos\theta - 2(1-p^2) = 0 \quad \therefore \cos\theta = \dfrac{2(1-p^2)}{1+p^2}$

$0 < \cos\theta < 1$ より $1-p^2 > 0 \quad \therefore p < 1 \quad 2(1-p^2) < 1+p^2 \quad 1 < 3p^2 \quad \dfrac{1}{3} < p^2 \quad \therefore \dfrac{1}{\sqrt{3}} < p$

以上により、求める範囲は $\therefore \dfrac{1}{\sqrt{3}} < p < 1$ ……(答)