1962年京大理 $\boxed{5}$

（イ）

$$f(x)=\sqrt{2}a\pi x+\cos\pi x+\sin\pi x$$

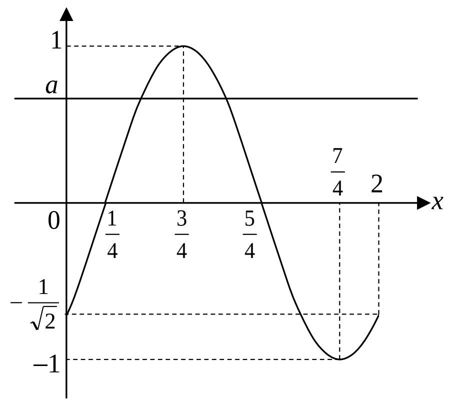
$$f'(x)=\sqrt{2}a\pi-\pi\sin\pi x+\pi\cos\pi x=\sqrt{2}a\pi-\sqrt{2}\pi\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\pi\left\{a-\sin\pi\left(x-\frac{1}{4}\right)\right\}$$

$f(x)$ が極値を持つには、$f'(x)=0$ となる x が存在し、なおかつその前後で $f'(x)$ の符号が変わることが条件である。$-1\leqq\sin\pi\left(x-\frac{1}{4}\right)\leqq1$ であるから　$\therefore a<1$　……(答)

（ロ）

$\sin\pi\left(x-\frac{1}{4}\right)$ の周期は2であり、$0\leqq x\leqq2$ において、$f'(x)=0$、

すなわち、$a=\sin\pi\left(x-\frac{1}{4}\right)$ となる x は、2つ存在する。



これを $p,\ q\ (p<q)$ とすると、$0\leqq x\leqq2$ における増減は、右下の通り。
$x=p$ において、極大となる。

x	0	$\cdots$	p	$\cdots$	q	$\cdots$	2
$f'(x)$		＋	0	－	0	＋	
$f(x)$		↗		↘		↗	

周期性により、$f(x)$ が極大値をとる x は、n を整数として、
$x=p+2n$ と書ける。

$$\begin{aligned} f(p+2n)&=\sqrt{2}a\pi(p+2n)+\cos\pi(p+2n)+\sin\pi(p+2n)\\ &=\sqrt{2}a\pi(p+2n)+\cos\pi p+\sin\pi p \end{aligned}$$

したがって、$f(x)$ が極大値をとる x は、直線 $y=\sqrt{2}a\pi x+\cos\pi p+\sin\pi p$ 上に、等間隔に並んでいる。
(証明終)