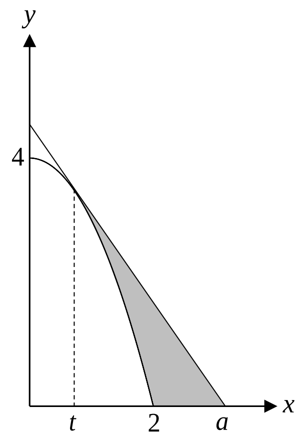
1962 年京大理 $\boxed{6}$

$y=4-x^2$ 上の点 $(t,\ 4-t^2)$ $(0<t<2)$ における接線は　$y=-2t(x-t)+4-t^2=-2tx+4+t^2$

これが $(a,\ 0)$ を通るとき　$-2ta+4+t^2=0$　$t^2-2at+4=0$　$t=a\pm\sqrt{a^2-4}$



$t<2<a$ より　$\therefore t=a-\sqrt{a^2-4}$　求める面積を、a, t で表すと

$$S=\frac{1}{2}(a-t)(4-t^2)-\int_t^2(4-x^2)dx=\frac{1}{2}(a-t)(4-t^2)-\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_t^2$$

$$=\frac{1}{2}(a-t)(4-t^2)+4t-\frac{t^3}{3}-\frac{16}{3}$$

ここで

$$a-t=\sqrt{a^2-4}\quad t^2=a^2+(a^2-4)-2a\sqrt{a^2-4}=2(a^2-2)-2a\sqrt{a^2-4}$$

$$4-t^2=4-2(a^2-2)+2a\sqrt{a^2-4}=-2(a^2-4)+2a\sqrt{a^2-4}$$

$$\frac{1}{2}(a-t)(4-t^2)=-(a^2-4)^{\frac{3}{2}}+a(a^2-4)$$

$$t^3=a^3-3a^2\sqrt{a^2-4}+3a(a^2-4)-(a^2-4)^{\frac{3}{2}}\quad \frac{t^3}{3}=\frac{a^3}{3}-a^2\sqrt{a^2-4}+a(a^2-4)-\frac{1}{3}(a^2-4)^{\frac{3}{2}}$$

代入して整理すると

$$S=-(a^2-4)^{\frac{3}{2}}+a(a^2-4)+4a-4\sqrt{a^2-4}-\frac{a^3}{3}+a^2\sqrt{a^2-4}-a(a^2-4)+\frac{1}{3}(a^2-4)^{\frac{3}{2}}-\frac{16}{3}$$

$$=-\frac{2}{3}(a^2-4)^{\frac{3}{2}}+4a+(a^2-4)\sqrt{a^2-4}-\frac{a^3}{3}-\frac{16}{3}=\frac{1}{3}(a^2-4)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}(a^3-12a+16)$$

$$=\frac{1}{3}(a^2-4)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}(a-2)^2(a+4)\quad\cdots\cdots(答)$$

※ただの計算問題だが、式をどこまで簡単にすべきか悩ましい。