1963 年京大文 $\boxed{5}$

根号内の式の値は、正でなければならないから　$x(1-x)>0$　$\therefore 0<x<1$

以下、$0<x<1$の条件下で考える。

$$|r-nx|<a\sqrt{nx(1-x)} \quad (r-nx)^2<a^2nx(1-x) \quad n^2x^2-2rnx+r^2+a^2n(x^2-x)=(a^2+n)nx^2-(a^2+2r)nx+r^2<0$$

ここで、$(a^2+n)nx^2-(a^2+2r)nx+r^2=0$を解く。

$$D=(a^2+2r)^2n^2-4(a^2+n)nr^2=(a^4+4ra^2+4r^2)n^2-4nr^2a^2-4n^2r^2$$

$$=n^2a^4+4nr(n-r)a^2=n^2a^2\left\{a^2+4r\left(1-\frac{r}{n}\right)\right\}>0$$

$$x=\frac{(a^2+2r)n\pm\sqrt{D}}{2(a^2+n)n}=\frac{(a^2+2r)n\pm na\sqrt{a^2+4r\left(1-\frac{r}{n}\right)}}{2(a^2+n)n}=\frac{a^2+2r\pm a\sqrt{a^2+4r\left(1-\frac{r}{n}\right)}}{2(a^2+n)}$$

$(a^2+n)nx^2-(a^2+2r)nx+r^2<0$の解は　$\dfrac{a^2+2r-a\sqrt{a^2+4r\left(1-\frac{r}{n}\right)}}{2(a^2+n)}<x<\dfrac{a^2+2r+a\sqrt{a^2+4r\left(1-\frac{r}{n}\right)}}{2(a^2+n)}$

ここで、$a^2+2r-a\sqrt{a^2+4r\left(1-\frac{r}{n}\right)}>a^2+2r-a\sqrt{a^2+4r}$ であり、

$$(a^2+2r)^2-a^2(a^2+4r)=a^4+4ra^2+4r^2-a^4-4ra^2=4r^2>0$$

$$(a^2+2r)^2>a^2(a^2+4r) \quad a^2+2r>a\sqrt{a^2+4r} \quad \therefore a^2+2r-a\sqrt{a^2+4r\left(1-\frac{r}{n}\right)}>a^2+2r-a\sqrt{a^2+4r}>0$$

また、$\dfrac{a^2+2r+a\sqrt{a^2+4r\left(1-\frac{r}{n}\right)}}{2(a^2+n)}<1$とすると、$a^2+2r+a\sqrt{a^2+4r\left(1-\frac{r}{n}\right)}<2(a^2+n)$ より、

$a^2+2(n-r)>a\sqrt{a^2+4r\left(1-\frac{r}{n}\right)}$ が成り立てばよい。

$$\left\{a^2+2(n-r)\right\}^2-a^2\left\{a^2+4r\left(1-\frac{r}{n}\right)\right\}=a^4+4(n-r)a^2+4(n-r)^2-a^4-4\frac{r}{n}(n-r)a^2$$

$$=4\left(1-\frac{r}{n}\right)(n-r)a^2+4(n-r)^2=4(n-r)^2\left(\frac{a^2}{n}+1\right)>0$$

$$\left\{a^2+2(n-r)\right\}^2>a^2\left\{a^2+4r\left(1-\frac{r}{n}\right)\right\} \quad \therefore a^2+2(n-r)>a\sqrt{a^2+4r\left(1-\frac{r}{n}\right)}$$

以上により、$0<\dfrac{a^2+2r-a\sqrt{a^2+4r\left(1-\frac{r}{n}\right)}}{2(a^2+n)}$, $\dfrac{a^2+2r+a\sqrt{a^2+4r\left(1-\frac{r}{n}\right)}}{2(a^2+n)}<1$であるから

$$\therefore \frac{a^2+2r-a\sqrt{a^2+4r\left(1-\frac{r}{n}\right)}}{2(a^2+n)}<x<\frac{a^2+2r+a\sqrt{a^2+4r\left(1-\frac{r}{n}\right)}}{2(a^2+n)} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

（注）

範囲の両端が、$0<x<1$ に含まれるかの論証が求められているが、

$a^2x(1-x)>n\left(x-\dfrac{r}{n}\right)^2$ を満たす範囲を求めるので、$0<\dfrac{r}{n}<1$ および

グラフの位置関係より、両端が $0<x<1$ に含まれることはわかる。

グラフで説明すれば、十分かもしれない。