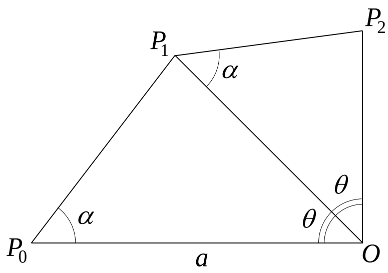
1963 年京大理 5

（イ）

$\angle P_0P_1O=\pi-\theta-\alpha$ であるから、正弦定理により



$$\frac{OP_0}{\sin\angle P_0P_1O}=\frac{OP_1}{\sin\angle OP_0P_1}\qquad \frac{OP_1}{OP_0}=\frac{\sin\angle OP_0P_1}{\sin\angle P_0P_1O}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\pi-\theta-\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta+\alpha)}$$

$\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\theta+\alpha)}=r$ とすると、相似性により

$$OP_2=rOP_1=r^2OP_0=ar^2\qquad OP_3=rOP_2=ar^3\qquad\cdots\qquad OP_n=rOP_{n-1}=ar^n$$

P_n が定点 O に限りなく近づくには、$OP_n\to 0$ 、$r<1$ が必要であるから

$$r=\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta+\alpha)}<1\qquad \sin\alpha<\sin(\theta+\alpha)\qquad \sin(\theta+\alpha)-\sin\alpha=2\cos\frac{\theta+2\alpha}{2}\sin\frac{\theta}{2}>0$$

$0<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ より $\sin\dfrac{\theta}{2}>0$ であるから　$\cos\dfrac{\theta+2\alpha}{2}>0$　$\dfrac{\theta+2\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{2}$　$\therefore\theta+2\alpha<\pi$

逆に、$\theta+2\alpha<\pi$ のとき、$r<1$ であるから、求める必要十分条件は　$\therefore\theta+2\alpha<\pi$　……(答)

（ロ）

$OP_n=ar^n,\ OP_{n+1}=ar^{n+1}$ より　$\triangle OP_nP_{n+1}=\dfrac{1}{2}OP_n\cdot OP_{n+1}\sin\theta=\dfrac{1}{2}a^2r^{2n+1}\sin\theta$

$\triangle OP_nP_{n+1}$ は、公比 r^2 の等比数列であるから　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\triangle OP_kP_{k+1}=\frac{1}{2}a^2r\sin\theta\sum_{k=0}^{n}r^{2k}=\frac{1}{2}a^2r\sin\theta\cdot\frac{1-r^{2(n+1)}}{1-r^2}$

$$\therefore S=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\triangle OP_kP_{k+1}=\frac{1}{2}a^2r\sin\theta\cdot\frac{1}{1-r^2}$$

$\triangle OP_0P_1=\dfrac{1}{2}a^2r\sin\theta$ であるから　$\therefore\dfrac{S}{\triangle OP_0P_1}=\dfrac{1}{1-r^2}=\dfrac{\sin^2(\theta+\alpha)}{\sin^2(\theta+\alpha)-\sin^2\alpha}$　……(答)

（ハ）

正弦定理より　$\dfrac{OP_1}{\sin\alpha}=\dfrac{P_0P_1}{\sin\theta}$　$P_0P_1=\dfrac{\sin\theta}{\sin\alpha}OP_1=\dfrac{\sin\theta}{\sin\alpha}ar=\dfrac{\sin\theta}{\sin(\theta+\alpha)}a$

P_nP_{n+1} は、公比 r の等比数列であるから　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}P_kP_{k+1}=\frac{\sin\theta}{\sin(\theta+\alpha)}a\sum_{k=0}^{n}r^k=\frac{\sin\theta}{\sin(\theta+\alpha)}a\cdot\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$

$$\therefore L=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}P_kP_{k+1}=\frac{\sin\theta}{\sin(\theta+\alpha)}a\cdot\frac{1}{1-r}=\frac{\sin\theta}{\sin(\theta+\alpha)-\sin\alpha}a\quad\text{……(答)}$$

$L=\dfrac{\sin\theta}{2\cos\dfrac{\theta+2\alpha}{2}\sin\dfrac{\theta}{2}}a=\dfrac{\dfrac{\sin\theta}{\theta}}{\cos\dfrac{\theta+2\alpha}{2}\dfrac{\sin(\theta/2)}{\theta/2}}a$ であり、$\theta\to 0$ のとき、$\dfrac{\sin\theta}{\theta}\to 1$、$\dfrac{\sin(\theta/2)}{\theta/2}\to 1$ であるから

$$\therefore\lim_{\theta\to 0}L=\frac{a}{\cos\alpha}\quad\text{……(答)}$$