1963 年京大理 $\boxed{1}$ 文 $\boxed{1}$ 共通

（イ）

$x^2-(a+c)x+(ac-b^2)=0$ の判別式は　$D=(a+c)^2-4(ac-b^2)=(a-c)^2+4b^2\geqq 0$

したがって、実根を持つ。（証明終）

（ロ）

$\alpha=\dfrac{a+c}{2}-\dfrac{\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}$, $\beta=\dfrac{a+c}{2}+\dfrac{\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}$ であるから、$\alpha\leqq\gamma\leqq\beta$ であるとき

$$-\frac{\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}\leqq-\frac{(a-c)(p^2-q^2)+4bpq}{2(p^2+q^2)}\leqq\frac{\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}\quad\text{——①}$$

$\left|\dfrac{(a-c)(p^2-q^2)+4bpq}{2(p^2+q^2)}\right|\leqq\left|\dfrac{\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}\right|$ であれば、①が成り立つ。

$$\begin{aligned}
&\left|(p^2+q^2)\sqrt{(a-c)^2+4b^2}\right|^2-\left|(a-c)(p^2-q^2)+4bpq\right|^2\\
&=(p^2+q^2)^2\left\{(a-c)^2+4b^2\right\}-(a-c)^2(p^2-q^2)^2-8bpq(a-c)(p^2-q^2)-16b^2p^2q^2\\
&=\left\{(p^2+q^2)^2-(p^2-q^2)^2\right\}(a-c)^2-8bpq(a-c)(p^2-q^2)+4b^2\left\{(p^2+q^2)^2-4p^2q^2\right\}\\
&=4p^2q^2(a-c)^2-8bpq(a-c)(p^2-q^2)+4b^2(p^2-q^2)^2\\
&=4\left\{pq(a-c)-b(p^2-q^2)\right\}^2\geqq 0
\end{aligned}$$

したがって

$$\left|(a-c)(p^2-q^2)+4bpq\right|^2\leqq\left|(p^2+q^2)\sqrt{(a-c)^2+4b^2}\right|^2$$

$$\left|(a-c)(p^2-q^2)+4bpq\right|\leqq\left|(p^2+q^2)\sqrt{(a-c)^2+4b^2}\right|\qquad\therefore\left|\frac{(a-c)(p^2-q^2)+4bpq}{2(p^2+q^2)}\right|\leqq\left|\frac{\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}\right|$$

常に①が成り立つから、常に $\alpha\leqq\gamma\leqq\beta$ が成り立つ。