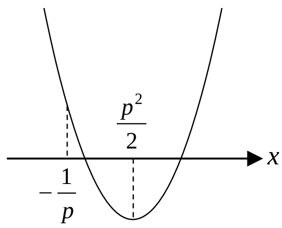
1964 年京大文 $\boxed{5}$

（イ）

$p=\log_a b$ とおく。 $f(x)=x^2-(\log_a b)^2 x+\log_a\left(\dfrac{1}{b^2}\right)=\left(x-\dfrac{p^2}{2}\right)^2-\dfrac{p^4}{4}-2p$ とすると



軸について $\dfrac{p^2}{2}>\log_b\left(\dfrac{1}{a}\right)=-\dfrac{1}{p}$ $\quad p^4+2p=p(p+1)(p^2-p+1)>0$

$p^2-p+1=\left(p-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$ より $\quad p(p+1)>0 \quad \therefore p<-1,\ 0<p$ ――①

$-\dfrac{p^4}{4}-2p\leqq 0$ より $\quad p^4+8p=p(p+2)(p^2-2p+4)\geqq 0$

$p^2-2p+4=(p-1)^2+3>0$ より $\quad p(p+2)\geqq 0 \quad \therefore p\leqq -2,\ 0\leqq p$ ――②

$f\left(\log_b\left(\dfrac{1}{a}\right)\right)=f\left(-\dfrac{1}{p}\right)=\dfrac{1}{p^2}+p^2\cdot\dfrac{1}{p}-2p=\dfrac{1}{p^2}-p>0 \quad p^3-1=(p-1)(p^2+p+1)<0$

$p^2+p+1=\left(p+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$ より $\quad p-1<0 \quad \therefore p<1$ ――③

①～③より $\quad \therefore p\leqq -2,\ 0<p<1 \quad p=\log_a b=\dfrac{\log b}{\log a}$ であるから $\quad \dfrac{\log b}{\log a}\leqq -2,\ 0<\dfrac{\log b}{\log a}<1$

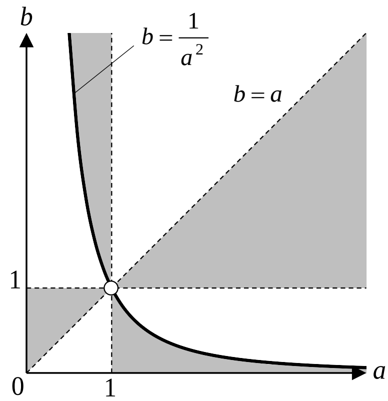
$0<a<1$ のとき $\quad \log a<0$ であるから

$\log b\geqq -2\log a=\log\left(\dfrac{1}{a^2}\right)>0,\ \log a<\log b<0 \quad \therefore a<b<1,\ b\geqq\dfrac{1}{a^2}$

$1<a$ のとき $\quad \log a>0$ であるから

$\log b\leqq -2\log a=\log\left(\dfrac{1}{a^2}\right)<0,\ \log a>\log b>0 \quad \therefore 1<b<a,\ b\leqq\dfrac{1}{a^2}<1$

図示すると右の通り。境界線は太線部のみ含み、各交点は含まない。



（ロ）

$\alpha,\ \beta$ は、 $f(x)=x^2-p^2x-2p=0$ の 2 解であるから、解と係数の関係より $\quad \alpha+\beta=p^2,\ \alpha\beta=-2p$

$12\alpha+12\beta-\alpha^2\beta-\alpha\beta^2=12(\alpha+\beta)-\alpha\beta(\alpha+\beta)=12p^2+2p^3$

$p\leqq -2,\ 0<p<1$ における、 $g(p)=12p^2+2p^3$ の最大値を調べればよい。

$g'(p)=24p+6p^2=6p(4+p)$

増減は右の通り。 $p\leqq -2$ においては、 $p=-4$ において極大となる。

$0<p<1$ では単調増加である。

p	$\cdots$	-4	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(p)$	+	0	−	0	+
$g(p)$	↗		↘		↗

$g(-4)=12\cdot 16-2\cdot 64=64 \quad g(1)=14$ 　求める最大値は 64 ……(答)