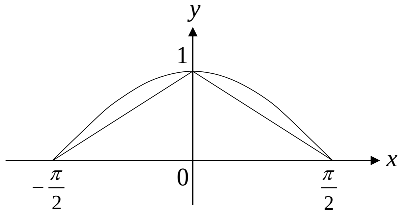
1964 年京大理 $\boxed{6}$

S を $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲とする。

S に含まれる題意の三角形のうち、面積が最大になるのは、

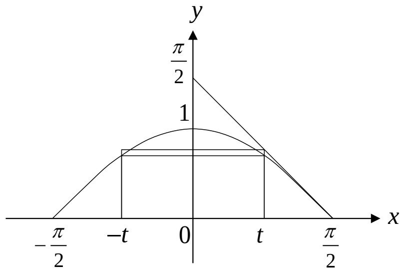
$\left(-\dfrac{\pi}{2},\ 0\right),\ (0,\ 1),\ \left(\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$ を頂点とするものであるのは明らかである。



$\therefore B = \dfrac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1 = \dfrac{\pi}{2}$

S に含まれる題意の長方形で、点 $(\pm t,\ \cos t)$ $\left(0 < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を頂点とするものの面積は

$2t\cos t$ である。ここで、$x = \dfrac{\pi}{2}$ における $y = \cos x$ の接線と、凸性を考えると



$2t\cos t < 2t\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = -2\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right)^2 + \dfrac{\pi^2}{8}$ $\quad \therefore A < \dfrac{\pi^2}{8}$

$\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi^2}{8} = \dfrac{\pi(4-\pi)}{8} > 0$ より $\quad \therefore A < \dfrac{\pi^2}{8} < B$

S に含まれる題意の半円を考える。中心は原点 $(0,\ 0)$ としてよい。

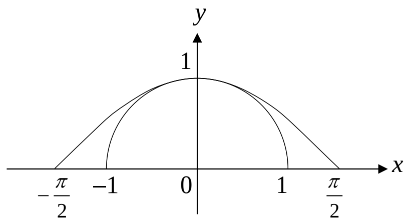
原点と点 $(t,\ \cos t)$ $\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ までの距離を r とすると $\quad r^2 = t^2 + \cos^2 t = t^2 + \dfrac{1+\cos 2t}{2}$

$f(t) = t^2 + \dfrac{1+\cos 2t}{2}$ とすると $\quad f'(t) = 2t - \sin 2t \quad f''(t) = 2(1-\cos 2t) \geqq 0$

$f'(t)$ は単調増加であり、$f'(0) = 0,\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi$ であるから、$f'(t) \geqq 0$。

したがって、$f(t)$ は単調増加であり、$t = 0$ において r は最小値1をとる。

原点を中心とした半径1の半円は、$(0,\ 1)$ において $y = \cos x$ と接するので



$\therefore C = \dfrac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1^2 = \dfrac{\pi}{2}$

以上により $\quad \therefore A < B = C$ ……(答)