1964 年京大理$\boxed{4}$文$\boxed{4}$共通

$y=x^2$ 上に、2 点 $A(a,\ a^2),\ B(b,\ b^2)\ (a<b)$ をとる。
このとき、 $A,\ B$ における接線の傾きは、 $2a,\ 2b$ である。
A における接線の式は　$y=2a(x-a)+a^2=2ax-a^2$　B における接線の式は　$y=2bx-b^2$
これら 2 接線の交点を P とすると、P の座標 $(X,\ Y)$ は、$2aX-a^2=2bX-b^2$ より

$$2(a-b)X=a^2-b^2=(a-b)(a+b) \quad \therefore X=\frac{a+b}{2} \quad \therefore Y=(a^2+ab)-a^2=ab$$

$2a=\tan\alpha,\ 2b=\tan\beta\ \left(-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$ とすると、$\alpha<\beta$ であり、$\beta-\alpha=\frac{\pi}{3}$ であるから

$$\tan(\beta-\alpha)=\sqrt{3}=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{2(b-a)}{1+4ab} \quad 2(b-a)=\sqrt{3}(1+4ab) \quad 4(b-a)^2=3(1+4ab)^2 \quad \text{——①}$$

$a+b=2X,\ ab=Y$ であるから　$(b-a)^2=(a+b)^2-4ab=4(X^2-Y)$
①に代入して　$16(X^2-Y)=3(1+4Y)^2=3+24Y+48Y^2$　整理すると

$$16X^2-(48Y^2+40Y)=16X^2-48\left(Y^2+\frac{5}{6}Y\right)=16X^2-48\left(Y+\frac{5}{12}\right)^2+\frac{25}{3}=3$$

$$48\left(Y+\frac{5}{12}\right)^2-16X^2=\frac{16}{3} \quad 3\left(Y+\frac{5}{12}\right)^2-X^2=\frac{1}{3} \quad \therefore 9\left(Y+\frac{5}{12}\right)^2-3X^2=1$$

以上により、P の軌跡は、双曲線 $9\left(y+\frac{5}{12}\right)^2-3x^2=1$ である。……(答)

(注)
交角が $60°$ とは、2 接線が交差してなす角のうち、小さい方が $60°$ であることを意味し、$\angle APB=60°$ とは限らない。P が双曲線 $9\left(y+\frac{5}{12}\right)^2-3x^2=1$ の上側を通るとき、$\angle APB=120°$ であり、下側を通るとき、$\angle APB=60°$ である。