1965年京大理$\boxed{3}$文$\boxed{3}$共通

$\sin(x+\alpha)+\sin(x+\beta)=\sqrt{3}\sin x$が、任意の$x$について成立するから、

$x=0$のとき　$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=0$

$\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}=0$または$\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=0$であり、$-\pi\leqq\alpha+\beta\leqq\pi,\ -\pi\leqq\alpha-\beta\leqq\pi$であるから、

$\alpha+\beta=0$または$\alpha-\beta=\pm\pi$である。

$x=\dfrac{\pi}{2}$のとき　$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\beta\right)=\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\sqrt{3}$

$\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=0$は不適であるから、$\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}=0$、$\alpha+\beta=0$である。

$\alpha+\beta=0$のとき　$\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\dfrac{\alpha-\beta}{2}\leqq\dfrac{\pi}{2}$であるから　$\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\pm\dfrac{\pi}{6}$　$\therefore\alpha-\beta=\pm\dfrac{\pi}{3}$

したがって　$\therefore(\alpha,\ \beta)=\left(\pm\dfrac{\pi}{6},\mp\dfrac{\pi}{6}\right)$（複号同順）

このとき

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\frac{\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{2}\cos\frac{\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{2}=2\sin x\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}\sin x$$

確かに、任意のxについて成立。

以上により　$\therefore(\alpha,\ \beta)=\left(\pm\dfrac{\pi}{6},\mp\dfrac{\pi}{6}\right)$（複号同順）……(答)