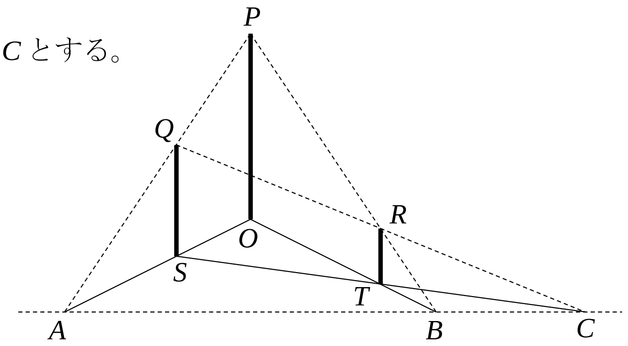
1966年京大理$\boxed{3}$新文$\boxed{3}$新共通

条件により、3本のテレビ塔は、互いに高さが異なる。
3本のテレビ塔の根元が、一直線上にあるとき、A, B, Cはいずれもこの直線上にある。
3本のテレビ塔の根元が、一直線上にないときを考える。

（解答1）
3本のテレビ塔の先端を、高い順にP, Q, Rとする。
PQ, PR, QRの延長が、平地とぶつかる点を、それぞれA, B, Cとする。
P, Q, Rから平面に降ろした足を、それぞれO, S, Tとし、
$OS:SA=1-s:s,\ OT:TB=1-t:t\ (s\neq t)$とすると



$$\overrightarrow{OQ}=s\overrightarrow{OP}+(1-s)\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OR}=t\overrightarrow{OP}+(1-t)\overrightarrow{OB}$$

直線QR上の点は、$u\overrightarrow{OQ}+(1-u)\overrightarrow{OR}$と表せる。

$\overrightarrow{OP}$の係数は　$us+(1-u)t=(s-t)u+t$　点Cにおいて、$\overrightarrow{OP}$の係数が0になるから　$\therefore u=\dfrac{t}{t-s}$

$u(1-s)=\dfrac{t(1-s)}{t-s},\ (1-u)(1-t)=\dfrac{-s(1-t)}{t-s}$であり、$\overrightarrow{OC}=\dfrac{t(1-s)}{t-s}\overrightarrow{OA}+\dfrac{s(t-1)}{t-s}\overrightarrow{OB}$と表せる。

ここで、$\dfrac{t(1-s)}{t-s}+\dfrac{s(t-1)}{t-s}=\dfrac{t-st+st-s}{t-s}=\dfrac{t-s}{t-s}=1$であるから、$C$は直線$AB$上の点である。
すなわち、3点A, B, Cは一直線上にある。（証明終）

（解答2）
3点A, B, Cは、3本のテレビ塔の先端によって定まる平面α上にある。
平面αは、平地と平行ではないため、平地と交わり、交わった箇所は直線になる。
3点A, B, Cは、平面α上かつ平地上にある。すなわち、一直線上にある。（証明終）

※実は一切計算不要であることに、試験場で気づけた受験生が、どれだけいたか？

1966 年京大理 $\boxed{4}$ 旧文 $\boxed{3}$ 旧共通

$$x(x-a)+m(x-b)(x-c)=(m+1)x^2-(a+bm+cm)x+bcm=0$$

$$D=(a+bm+cm)^2-4m(m+1)bc=a^2+b^2m^2+c^2m^2+2abm+2cam+2bcm^2-4bcm^2-4bcm$$

$$=(b-c)^2m^2+2(ab-2bc+ca)m+a^2$$

$m>0$ において、$D\geqq 0$ が成り立てばよい。

$f(m)=(b-c)^2m^2+2(ab-2bc+ca)m+a^2$ とする。$f(m)$ は下に凸な二次関数である。

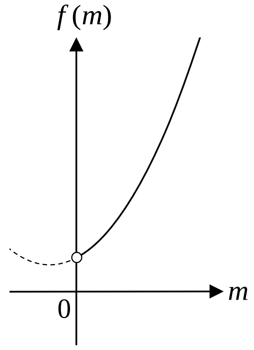
$f(0)=a^2>0$ であるから

ｉ)

軸 $\dfrac{2bc-ab-ca}{(b-c)^2}\leqq 0$、すなわち $2bc-ab-ca\leqq 0$、$a\geqq\dfrac{2bc}{b+c}$ のとき、

$m>0$ において $f(m)\geqq 0$ となる。$a\geqq\dfrac{2bc}{b+c}$ ならば条件を満たす。

i)



ｉｉ)

軸 $\dfrac{2bc-ab-ca}{(b-c)^2}>0$、すなわち $a<\dfrac{2bc}{b+c}$ のとき

$f(m)=0$ が相違なる 2 実数解を持たなければよい。

$$D/4=(ab-2bc+ca)^2-a^2(b-c)^2$$

$$=(ab-2bc+ca+ab-ca)(ab-2bc+ca-ab+ca)$$

$$=(2ab-2bc)(2ca-2bc)=4ab(a-c)(a-b)\leqq 0$$

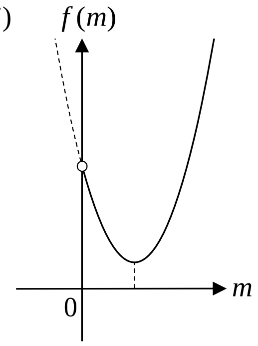
$$\therefore (a-c)(a-b)\leqq 0$$

これより、$b<a<c$ または $c<a<b$ であれば、条件を満たす。

$b<c$ のとき　$\dfrac{2bc}{2c}<\dfrac{2bc}{b+c}<\dfrac{2bc}{2b}$　$b<\dfrac{2bc}{b+c}<c$ であるから　$\therefore b<a<\dfrac{2bc}{b+c}$

$c<b$ のとき、同様に $c<\dfrac{2bc}{b+c}<b$ であるから　$\therefore c<a<\dfrac{2bc}{b+c}$

ii)



ｉ) と ｉｉ) を合わせると、求める必要十分条件は　$b<c$ かつ $b<a$　または　$c<b$ かつ $c<a$　……(答)

すなわち、相違なる正数 a, b, c のうち、最小値が a でなければよい。