1966年京大理$\boxed{4}$新文$\boxed{4}$新共通

$A(0,\ 0),\ B(a,\ 0)$とすると、条件により、$P(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta),\ Q(a+\cos\theta,\ \sin\theta)$とおける。

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2=(a+\cos\theta-\cos 2\theta)^2+(\sin\theta-\sin 2\theta)^2=a^2+2a(\cos\theta-\cos 2\theta)+(\cos\theta-\cos 2\theta)^2+(\sin\theta-\sin 2\theta)^2$$
$$=a^2+2a(\cos\theta-2\cos^2\theta+1)+2-2(\cos 2\theta\cos\theta+\sin 2\theta\sin\theta)$$
$$=-4a\cos^2\theta+2a\cos\theta+a^2+2a+2-2\cos(2\theta-\theta)=-4a\cos^2\theta+2(a-1)\cos\theta+a^2+2a+2$$

$f(t)=-4at^2+2(a-1)t+a^2+2a+2$とおき、$-1\leqq t\leqq 1$における最大値を考えればよい。

$$f(t)=-4a\left(t^2-\frac{a-1}{2a}t\right)+a^2+2a+2=-4a\left(t-\frac{a-1}{4a}\right)^2+\frac{(a-1)^2}{4a}+(a+1)^2+1$$
$$=-4a\left(t-\frac{a-1}{4a}\right)^2+(a+1)^2\left(1+\frac{1}{4a}\right)$$

ここで、軸$\dfrac{a-1}{4a}=\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1}{a}\right)$は、$a>0$に関して単調増加であり、$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{4},\ \lim_{a\to+0}\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{a}\right)=-\infty$である。

$\dfrac{a-1}{4a}=-1$を解くと　$a-1=-4a$　$5a=1$　$\therefore a=\dfrac{1}{5}$

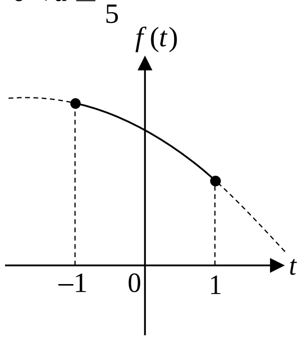
$0<a\leqq\dfrac{1}{5}$のとき、$\dfrac{a-1}{4a}\leqq -1$であり、$f(t)$の最大値は

$$f(-1)=-4a-2(a-1)+a^2+2a+2=a^2-4a+4=(a-2)^2$$

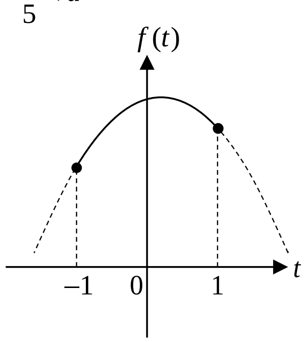
$\dfrac{1}{5}<a$のとき、$-1<\dfrac{a-1}{4a}<\dfrac{1}{4}$であり、$f(t)$の最大値は

$$f\left(\frac{a-1}{4a}\right)=(a+1)^2\left(1+\frac{1}{4a}\right)$$

$0<a\leqq\dfrac{1}{5}$



$\dfrac{1}{5}<a$



求める$\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{f(t)}$の最大値は　$0<a\leqq\dfrac{1}{5}$のとき$2-a$、$\dfrac{1}{5}<a$のとき$(a+1)\sqrt{1+\dfrac{1}{4a}}$　……(答)

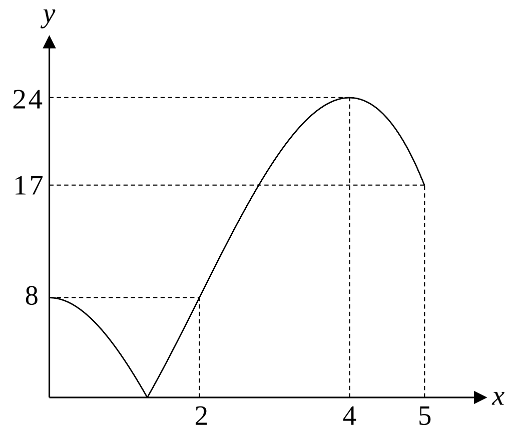
1966 年京大理 $\boxed{5}$ 旧文 $\boxed{5}$ 新文 $\boxed{4}$ 旧共通

$f(x)=x^3-6x^2+8 \qquad f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$

$f(x)$ の増減は右の通り。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

$f(0)=8,\ f(4)=-24$ であるから、$0\leqq x\leqq 5$ の範囲で
$y=|f(x)|$ のグラフを描くと、右図の通り。



これより

$0\leqq r\leqq 2$ のとき　$M(r)=8$

$2\leqq r\leqq 4$ のとき　$M(r)=-f(r)=-r^3+6r^2-8$

$4\leqq r\leqq 5$ のとき　$M(r)=24$

であるから

$$\int_0^5 M(r)dr=8\int_0^2 dr+\int_2^4(-r^3+6r^2-8)dr+24\int_4^5 dr=8\Big[r\Big]_0^2+\left[-\frac{r^4}{4}+2r^3-8r\right]_2^4+24\Big[r\Big]_4^5$$

$$=40+(-64+128-32+4-16+16)=76 \quad \cdots\cdots(答)$$