1966年京大理$\boxed{5}$旧文$\boxed{5}$新文$\boxed{4}$旧共通

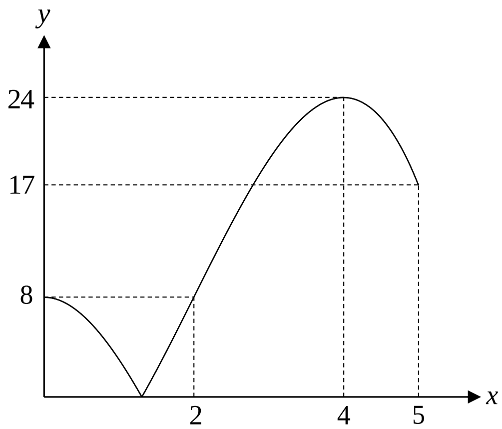
$f(x)=x^3-6x^2+8 \qquad f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$

$f(x)$ の増減は右の通り。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	＋	0	－	0	＋
$f(x)$	↗		↘		↗

$f(0)=8,\ f(4)=-24$ であるから、$0\leqq x\leqq 5$ の範囲で

$y=|f(x)|$ のグラフを描くと、右図の通り。



これより

$0\leqq r\leqq 2$ のとき　$M(r)=8$

$2\leqq r\leqq 4$ のとき　$M(r)=-f(r)=-r^3+6r^2-8$

$4\leqq r\leqq 5$ のとき　$M(r)=24$

であるから

$$\int_0^5 M(r)dr=8\int_0^2 dr+\int_2^4(-r^3+6r^2-8)dr+24\int_4^5 dr=8\Big[r\Big]_0^2+\left[-\frac{r^4}{4}+2r^3-8r\right]_2^4+24\Big[r\Big]_4^5$$

$$=40+(-64+128-32+4-16+16)=76$$ ……(答)

1966 年京大文 $\boxed{5}$ 旧

(i)

$2x^2+y<0,\ y<0 \quad y<-2x^2 \leqq 0$ のとき

$-2x^2-y=8+y \quad 2y=-2x^2-8 \quad \therefore y=-x^2-4$

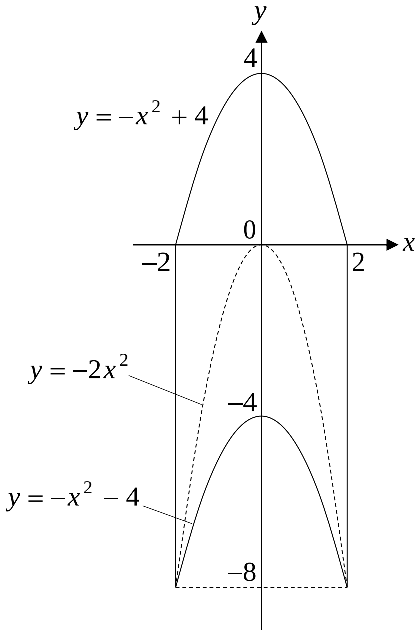
$2x^2+y \geqq 0,\ y<0 \quad -2x^2 \leqq y<0$ のとき

$2x^2+y=8+y \quad x^2=4 \quad \therefore x=\pm 2$

$2x^2+y \geqq 0,\ y \geqq 0 \quad -2x^2 \leqq 0 \leqq y$ のとき

$2x^2+y=8-y \quad 2y=-2x^2+8 \quad \therefore y=-x^2+4$

グラフは右図の通り。



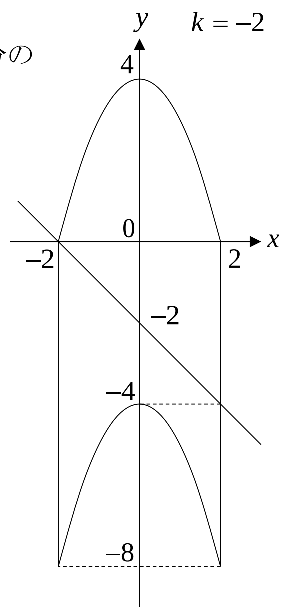
(ii)

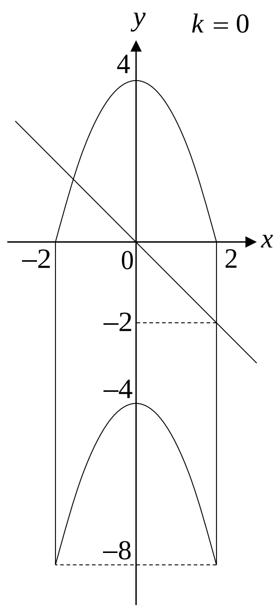
このグラフで囲まれた図形の面積は　$4\times 8=32$

このグラフで囲まれた範囲のうち、$y \geqq 0$ の部分の面積は　$2\int_0^2(-x^2+4)dx=2\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_0^2=\frac{32}{3}$

$-4 \leqq y \leqq 0$ の部分の面積は　$4\times 4=16$　$y \leqq -4$ の部分の面積は　$16-\frac{32}{3}=\frac{16}{3}$

このグラフで囲まれた図形のうち、直線 $y=-x+k$ より上の部分の面積を S_1、直線 $y=-x+k$ より下の部分の面積を S_2 とする。





$k=-2$ のとき

$S_1=8+\frac{32}{3},\ S_2=8+\frac{16}{3}$ であるから、$S_1>S_2$ である。

$k=0$ のとき

S_2 のうち、$y \leqq 0$ の部分の面積は $16-2+\frac{16}{3}=19+\frac{1}{3}>16$

であるから、$S_1<S_2$ である。

k を -2 から 0 まで動かすと、$S_1,\ S_2$ は連続的に変化し、S_1 は減少、S_2 は増加する。

$k=-2$ と $k=0$ で、S_1 と S_2 の大小関係が逆転しているので、$-2<k<0$ の範囲に、$S_1=S_2$ となる k が存在する。

以上により、題意は示された。(証明終)