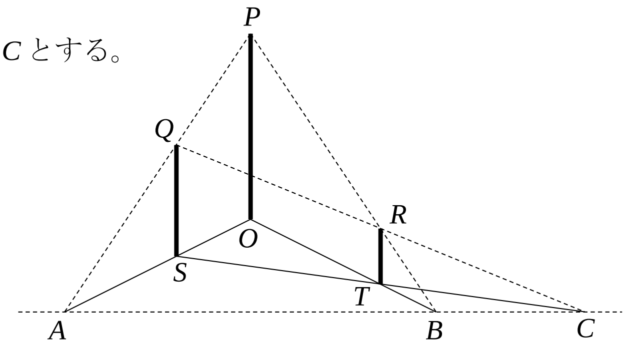
1966 年京大理 $\boxed{3}$ 新文 $\boxed{3}$ 新共通

条件により、3 本のテレビ塔は、互いに高さが異なる。
3 本のテレビ塔の根元が、一直線上にあるとき、A, B, C はいずれもこの直線上にある。
3 本のテレビ塔の根元が、一直線上にないときを考える。

(解答 1)
3 本のテレビ塔の先端を、高い順に P, Q, R とする。
PQ, PR, QR の延長が、平地とぶつかる点を、それぞれ A, B, C とする。
P, Q, R から平面に降ろした足を、それぞれ O, S, T とし、
$OS:SA=1-s:s,\ OT:TB=1-t:t\ (s\neq t)$ とすると



$$\overrightarrow{OQ}=s\overrightarrow{OP}+(1-s)\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OR}=t\overrightarrow{OP}+(1-t)\overrightarrow{OB}$$

直線 QR 上の点は、$u\overrightarrow{OQ}+(1-u)\overrightarrow{OR}$ と表せる。

$\overrightarrow{OP}$ の係数は　$us+(1-u)t=(s-t)u+t$　点 C において、$\overrightarrow{OP}$ の係数が 0 になるから　$\therefore u=\dfrac{t}{t-s}$

$u(1-s)=\dfrac{t(1-s)}{t-s},\ (1-u)(1-t)=\dfrac{-s(1-t)}{t-s}$ であり、$\overrightarrow{OC}=\dfrac{t(1-s)}{t-s}\overrightarrow{OA}+\dfrac{s(t-1)}{t-s}\overrightarrow{OB}$ と表せる。

ここで、$\dfrac{t(1-s)}{t-s}+\dfrac{s(t-1)}{t-s}=\dfrac{t-st+st-s}{t-s}=\dfrac{t-s}{t-s}=1$ であるから、C は直線 AB 上の点である。
すなわち、3 点 A, B, C は一直線上にある。(証明終)

(解答 2)
3 点 A, B, C は、3 本のテレビ塔の先端によって定まる平面 α 上にある。
平面 α は、平地と平行ではないため、平地と交わり、交わった箇所は直線になる。
3 点 A, B, C は、平面 α 上かつ平地上にある。すなわち、一直線上にある。(証明終)

※実は一切計算不要であることに、試験場で気づけた受験生が、どれだけいたか?

1966 年京大理 $\boxed{3}$ 旧

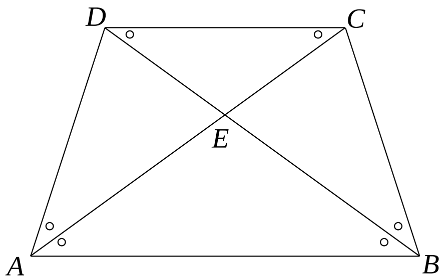
4 点が一直線上に並んでいるとき、両端の 2 点間を結ぶ線分の長さが最長になり、他に長さが等しい線分は存在しないから、4 点が一直線上に並んでいることはない。

4 点中 3 点が一直線上に並んでいるとき、例えば A, B, C がこの順に一直線上に並んでいるとする。このとき、AC が最長になり、$AB \neq BC$ であれば、異なる長さが 3 つ以上存在することになる。したがって、条件を満たすためには $AB = BC$ でなければならないが、残りの点 D について、$AD = CD = AC$ となり、3 点 A, C, D が正三角形をなすため、不適。

以上により、3 点以上が一直線上に並んでいることはない。

長さの等しい 3 線分が、1 つの頂点 A を共有しているとする。このとき、他の 3 頂点 B, C, D は正三角形をなすため、不適。長さの等しい 3 線分が、1 つの頂点 A を共有することはない。

$a<1$ のとき



考えられる 4 点の配置は、右図の通り。

$AB = AC = BD = 1,\ BC = CD = DA = a$ である。

このとき、四角形 $ABCD$ は等脚台形であり、$AB \parallel DC$ である。

対角線 AD, BC の交点を E とすると、$\angle ABE = \angle CDE,\ \angle BAE = \angle DCE$

であるから、$\triangle ABE \backsim \triangle CDE$ である。

すると、$AE : EC = 1 : a,\ AC = 1$ であるから　$\therefore CE = \dfrac{a}{1+a}$

また、$\angle ABD = \theta$ とすると、$\angle CDB = \angle CBD = \theta$ であり、$\angle ABC = \angle ACB = 2\theta$ である。

$\angle BCE = \angle BEC = 2\theta$ であるから、$\triangle ABC \backsim \triangle BCE$ である。

$AB : BC = BC : CE$ であるから　$1 : a = a : \dfrac{a}{1+a}$　$a^2 = \dfrac{a}{1+a}$　$a = \dfrac{1}{1+a}$　$a + a^2 = 1$　$a^2 + a - 1 = 0$

$0 < a < 1$ であるから　$\therefore a = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$a>1$ のとき

4 点の配置は、$a<1$ のときと相似であり、$AB = AC = BD = a,\ BC = CD = DA = 1$ である。

このときの a の値は　$\therefore a = 1 \times \dfrac{2}{-1+\sqrt{5}} = \dfrac{2(1+\sqrt{5})}{4} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

以上により　$\therefore a = \dfrac{\pm 1+\sqrt{5}}{2}$　……(答)

※4 点の配置が 1 通りしかないことの論証が、これで十分かどうか。なお、$5\theta = 180°$ より $\theta = 36°$ である。