1966年京大理 $\boxed{4}$ 新文 $\boxed{4}$ 新共通

$A(0,\ 0),\ B(a,\ 0)$ とすると、条件により、 $P(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta),\ Q(a+\cos\theta,\ \sin\theta)$ とおける。

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2 = (a+\cos\theta-\cos 2\theta)^2+(\sin\theta-\sin 2\theta)^2 = a^2+2a(\cos\theta-\cos 2\theta)+(\cos\theta-\cos 2\theta)^2+(\sin\theta-\sin 2\theta)^2$$

$$= a^2+2a(\cos\theta-2\cos^2\theta+1)+2-2(\cos 2\theta\cos\theta+\sin 2\theta\sin\theta)$$

$$= -4a\cos^2\theta+2a\cos\theta+a^2+2a+2-2\cos(2\theta-\theta) = -4a\cos^2\theta+2(a-1)\cos\theta+a^2+2a+2$$

$f(t)=-4at^2+2(a-1)t+a^2+2a+2$ とおき、 $-1 \leqq t \leqq 1$ における最大値を考えればよい。

$$f(t) = -4a\left(t^2-\frac{a-1}{2a}t\right)+a^2+2a+2 = -4a\left(t-\frac{a-1}{4a}\right)^2+\frac{(a-1)^2}{4a}+(a+1)^2+1$$

$$= -4a\left(t-\frac{a-1}{4a}\right)^2+(a+1)^2\left(1+\frac{1}{4a}\right)$$

ここで、軸 $\dfrac{a-1}{4a}=\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1}{a}\right)$ は、 $a>0$ に関して単調増加であり、 $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{4},\ \lim_{a\to+0}\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{a}\right)=-\infty$ である。

$\dfrac{a-1}{4a}=-1$ を解くと　$a-1=-4a$　$5a=1$　$\therefore a=\dfrac{1}{5}$

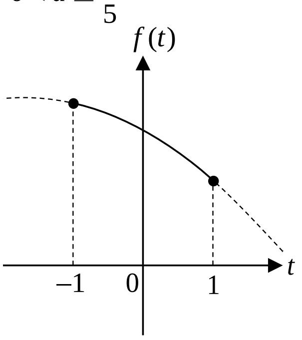
$0<a \leqq \dfrac{1}{5}$ のとき、 $\dfrac{a-1}{4a} \leqq -1$ であり、 $f(t)$ の最大値は

$$f(-1)=-4a-2(a-1)+a^2+2a+2=a^2-4a+4=(a-2)^2$$

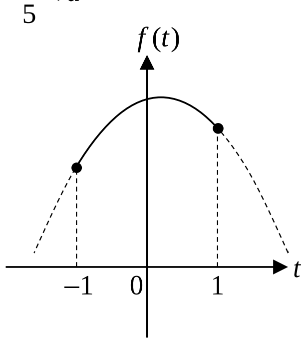
$\dfrac{1}{5}<a$ のとき、 $-1<\dfrac{a-1}{4a}<\dfrac{1}{4}$ であり、 $f(t)$ の最大値は

$$f\left(\frac{a-1}{4a}\right)=(a+1)^2\left(1+\frac{1}{4a}\right)$$

$0<a \leqq \dfrac{1}{5}$



$\dfrac{1}{5}<a$



求める $\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{f(t)}$ の最大値は　$0<a \leqq \dfrac{1}{5}$ のとき $2-a$ 、 $\dfrac{1}{5}<a$ のとき $(a+1)\sqrt{1+\dfrac{1}{4a}}$　……(答)

1966 年京大理 $\boxed{4}$ 旧文 $\boxed{3}$ 旧共通

$$x(x-a)+m(x-b)(x-c)=(m+1)x^2-(a+bm+cm)x+bcm=0$$
$$D=(a+bm+cm)^2-4m(m+1)bc=a^2+b^2m^2+c^2m^2+2abm+2cam+2bcm^2-4bcm^2-4bcm$$
$$=(b-c)^2m^2+2(ab-2bc+ca)m+a^2$$

$m>0$ において、 $D\geqq 0$ が成り立てばよい。

$f(m)=(b-c)^2m^2+2(ab-2bc+ca)m+a^2$ とする。 $f(m)$ は下に凸な二次関数である。

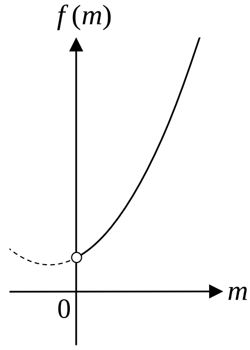
$f(0)=a^2>0$ であるから

i)

軸 $\dfrac{2bc-ab-ca}{(b-c)^2}\leqq 0$、すなわち $2bc-ab-ca\leqq 0$ 、 $a\geqq\dfrac{2bc}{b+c}$ のとき、

$m>0$ において $f(m)\geqq 0$ となる。 $a\geqq\dfrac{2bc}{b+c}$ ならば条件を満たす。

$i)$



ii)

軸 $\dfrac{2bc-ab-ca}{(b-c)^2}>0$、すなわち $a<\dfrac{2bc}{b+c}$ のとき

$f(m)=0$ が相違なる 2 実数解を持たなければよい。

$$D/4=(ab-2bc+ca)^2-a^2(b-c)^2$$
$$=(ab-2bc+ca+ab-ca)(ab-2bc+ca-ab+ca)$$
$$=(2ab-2bc)(2ca-2bc)=4ab(a-c)(a-b)\leqq 0$$

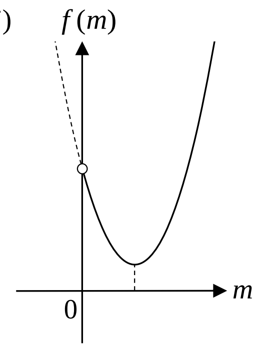
$\therefore (a-c)(a-b)\leqq 0$

これより、 $b<a<c$ または $c<a<b$ であれば、条件を満たす。

$b<c$ のとき　$\dfrac{2bc}{2c}<\dfrac{2bc}{b+c}<\dfrac{2bc}{2b}$　$b<\dfrac{2bc}{b+c}<c$ であるから　$\therefore b<a<\dfrac{2bc}{b+c}$

$c<b$ のとき、同様に $c<\dfrac{2bc}{b+c}<b$ であるから　$\therefore c<a<\dfrac{2bc}{b+c}$

$ii)$



i) と ii) を合わせると、求める必要十分条件は　$b<c$ かつ $b<a$　または　$c<b$ かつ $c<a$　……(答)

すなわち、相違なる正数 $a,\ b,\ c$ のうち、最小値が a でなければよい。