1966 年京大理 $\boxed{5}$ 新

$A(1,\ 1) \to B(-1,\ 1)$ と動くとき　$-1 \leqq x \leqq 1,\ y=1$ であるから

$u=a^{x+1}$ より　$1 \leqq u \leqq a^2$　$a^x=\dfrac{u}{a}$ より　$v=a^{2x-1}=\dfrac{u^2}{a^3}$

$B(-1,\ 1) \to C(-1,\ -1)$ と動くとき　$x=-1,\ -1 \leqq y \leqq 1$ であるから

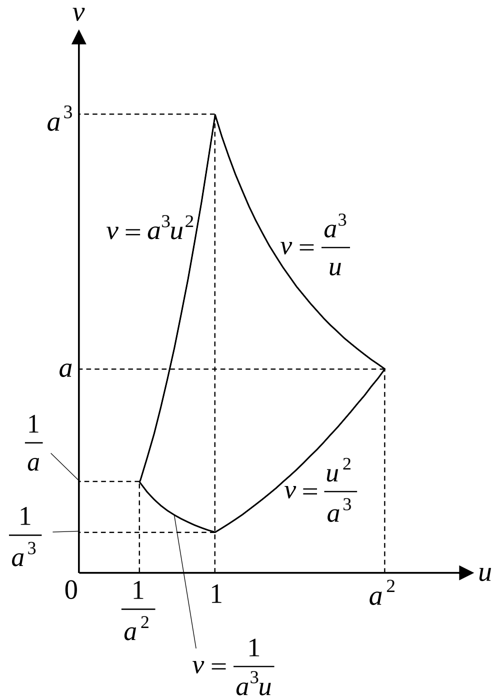
$u=a^{-1+y}$ より　$\dfrac{1}{a^2} \leqq u \leqq 1$　$a^y=au$ より　$v=a^{-2-y}=\dfrac{1}{a^3u}$

$C(-1,\ -1) \to D(1,\ -1)$ と動くとき　$-1 \leqq x \leqq 1,\ y=-1$ であるから

$u=a^{x-1}$ より　$\dfrac{1}{a^2} \leqq u \leqq 1$　$a^x=au$ より　$v=a^{2x+1}=a^3u^2$

$D(1,\ -1) \to A(1,\ 1)$ と動くとき　$x=1,\ -1 \leqq y \leqq 1$ であるから

$u=a^{1+y}$ より　$1 \leqq u \leqq a^2$　$a^y=\dfrac{u}{a}$ より　$v=a^{2-y}=\dfrac{a^3}{u}$



$Q(u,\ v)$ が描く軌跡を図示すると、右図の通りであるから、面積は

$$\int_{\frac{1}{a^2}}^{1}\left(a^3u^2-\frac{1}{a^3u}\right)du+\int_1^{a^2}\left(\frac{a^3}{u}-\frac{u^2}{a^3}\right)du$$

$$=\left[\frac{a^3}{3}u^3-\frac{1}{a^3}\log u\right]_{\frac{1}{a^2}}^{1}+\left[a^3\log u-\frac{1}{3a^3}u^3\right]_1^{a^2}=\left(\frac{a^3}{3}-\frac{1}{3a^3}+\frac{1}{a^3}\log\frac{1}{a^2}\right)+\left(a^3\log a^2-\frac{a^3}{3}+\frac{1}{3a^2}\right)$$

$$=2\left(a^3-\frac{1}{a^3}\right)\log a$$ ……(答)

1966 年京大理 5 旧文 5 新文 4 旧共通

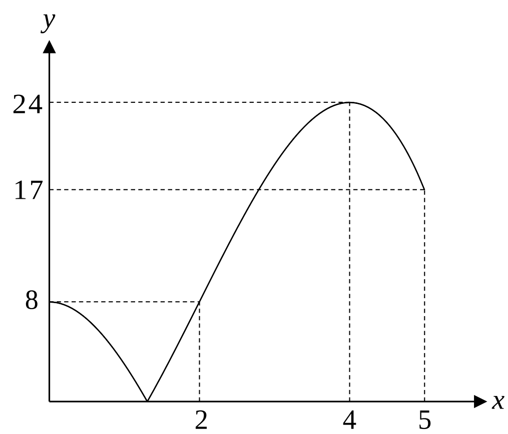
$f(x)=x^3-6x^2+8 \qquad f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$

$f(x)$ の増減は右の通り。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	＋	0	－	0	＋
$f(x)$	↗		↘		↗

$f(0)=8,\ f(4)=-24$ であるから、$0\leqq x\leqq 5$ の範囲で

$y=|f(x)|$ のグラフを描くと、右図の通り。



これより

$0\leqq r\leqq 2$ のとき　$M(r)=8$

$2\leqq r\leqq 4$ のとき　$M(r)=-f(r)=-r^3+6r^2-8$

$4\leqq r\leqq 5$ のとき　$M(r)=24$

であるから

$$\int_0^5 M(r)dr=8\int_0^2 dr+\int_2^4(-r^3+6r^2-8)dr+24\int_4^5 dr=8\Big[r\Big]_0^2+\left[-\frac{r^4}{4}+2r^3-8r\right]_2^4+24\Big[r\Big]_4^5$$

$$=40+(-64+128-32+4-16+16)=76$$ ……(答)