1966年京大理 $\boxed{6}$ 新

(i)

n 個の頂点から、相違なる3点を選ぶ組み合わせの総数に等しいから　${}_nC_3=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$ ……(答)

(ii)

n 個の頂点から選んだ相違なる3点のうち、各2点に挟まれた辺の数が、いずれも $\dfrac{n}{2}$ より小さければよい。

各2点に挟まれた辺の数の最大値は、n が奇数のとき $\dfrac{n-1}{2}$、n が偶数のとき $\dfrac{n-2}{2}$ である。

各2点に挟まれた辺の数の最小値は、n が奇数のとき $n-2\times\dfrac{n-1}{2}=1$、$n$ が偶数のとき $n-2\times\dfrac{n-2}{2}=2$ である。

今、1つの頂点を固定し、一定方向に回りながら、順次他の2頂点を決めるとする。

n が奇数のとき

2番目の頂点の決め方は、$\dfrac{n-1}{2}$ 通り。A_1 と2番目の頂点に挟まれた辺の数を k $\left(1\leqq k\leqq\dfrac{n-1}{2}\right)$ とすると、

3番目の頂点の決め方は、残りの辺 $n-k$ を2つに分ける分け方の総数に等しいから、

$\left(\dfrac{n+1}{2}-k,\ \dfrac{n-1}{2}\right),\left(\dfrac{n+1}{2}-k+1,\ \dfrac{n-1}{2}-1\right),\cdots,\left(\dfrac{n-1}{2},\ \dfrac{n-1}{2}-(k-1)\right)$ の k 通り。

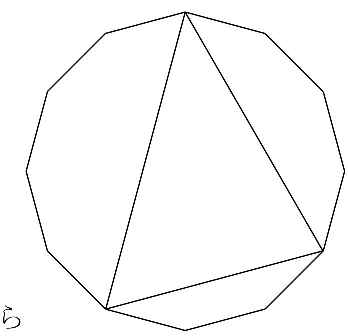
n が偶数のとき

2番目の頂点の決め方は、$\dfrac{n-2}{2}-1=\dfrac{n-4}{2}$ 通り。A_1 と2番目の頂点に挟まれた辺の数を k $\left(2\leqq k\leqq\dfrac{n-2}{2}\right)$ とすると、3番目の頂点の決め方は、残りの辺 $n-k$ を2つに分ける分け方の総数に等しいから、

$\left(\dfrac{n+2}{2}-k,\ \dfrac{n-2}{2}\right),\left(\dfrac{n+2}{2}-k+1,\ \dfrac{n-2}{2}-1\right),\cdots,\left(\dfrac{n-2}{2},\ \dfrac{n-2}{2}-(k-2)\right)$ の $k-1$ 通り。

以上により、1つの頂点を固定したときの、2番目、3番目の頂点の決め方の総数は

n が奇数のとき　$\displaystyle\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}k=\frac{1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}=\frac{(n-1)(n+1)}{8}$



n が偶数のとき　$\displaystyle\sum_{k=2}^{\frac{n-2}{2}}(k-1)=\sum_{k=1}^{\frac{n-4}{2}}k=\frac{1}{2}\cdot\frac{n-4}{2}\cdot\frac{n-2}{2}=\frac{(n-2)(n-4)}{8}$

重複するものを除くと、この値を n 倍し、3で割ったものが求める個数であるから

n が奇数のとき $\dfrac{n(n-1)(n+1)}{24}$、n が偶数のとき $\dfrac{n(n-2)(n-4)}{24}$ ……(答)

※ $n=4$ のとき、直角三角形しかできないので、個数は0。したがって、$n=4$ でも成立する。

1966 年京大理 $\boxed{6}$ 旧

(i)

$a_n=\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n$ とすると、$a_0=1$ であり、

$$a_n-a_{n+1}=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1}=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n\left(1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n\cdot\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$$
$$=a_{n+2}$$

したがって、条件(∗)を満たす。(証明終)

(ii)

$c_n=(-1)^n(a'_n-a_n)$ とすると

$$c_n+c_{n+1}=(-1)^n(a'_n-a_n)+(-1)^{n+1}(a'_{n+1}-a_{n+1})=(-1)^n\left\{(a'_n-a_n)-(a'_{n+1}-a_{n+1})\right\}$$
$$=(-1)^n\left\{(a'_n-a'_{n+1})-(a_n-a_{n+1})\right\}=(-1)^{n+2}(a'_{n+2}-a_{n+2})=c_{n+2}$$

したがって、$c_n+c_{n+1}=c_{n+2}$ を満たす。

次に、$a'_0=a_0=1$ より $c_0=0$ であるから、上記の漸化式より

$c_2=c_0+c_1=c_1$ 　$c_3=c_1+c_2=2c_1$ 　$c_4=c_2+c_3=3c_1$ 　$c_5=c_3+c_4=5c_1$ 　$c_6=c_4+c_5=8c_1$

以下帰納的に、$c_n=b_nc_1$ と表せることがわかる。

$b_0=0,\ b_1=1,\ b_2=1,\ b_3=2,\ b_4=3$ であり、$n\geqq 5$ のとき $b_n>n-1$ と予想できる。

$k\geqq 5$ のとき、$b_k>k-1,\ b_{k+1}>k$ と仮定すると　$b_{k+2}=b_k+b_{k+1}>2k-1$

$(2k-1)-(k+1)=k-2>0$ であるから　$\therefore b_{k+2}>k+1$ 　したがって、$n=k+2$ においても成立。

以上により、$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ について、$b_n\geqq n-1$ が示されたので　$\therefore |c_n|=|b_n||c_1|\geqq(n-1)|c_1|$ 　(証明終)

(iii)

$\{a'_n\}$ が正数列であるとき、$a'_0=1$ であり、$a'_n-a'_{n+1}=a'_{n+2}>0$ より

$a'_n>a'_{n+1}$ 　$\therefore 1=a'_0>a'_1>a'_2>\cdots>a'_n>\cdots$ 　$\therefore 0<a'_n\leqq 1$

$0<a_n\leqq 1$ も明らかであるから　$\therefore -1\leqq -a_n<0$ 　$\therefore -1<a'_n-a_n<1$ 　$\therefore |c_n|=|a'_n-a_n|<1$

一方、(ii)より $|c_n|\geqq(n-1)|c_1|$ であるから、$|c_1|\neq 0$ のとき、n を十分大きくすれば、$|c_n|>1$ となる。
これは $|c_n|<1$ に矛盾するから、$|c_1|=0$ でなければならない。

$c_0=c_1=0$ であるから　$c_2=c_0+c_1=0$ 　$c_3=c_1+c_2=0$ 　以下帰納的に、$c_n=0$ がわかる。

$c_n=(-1)^n(a'_n-a_n)=0$ 　$a'_n-a_n=0$ 　$\therefore a'_n=a_n$

したがって、$\{a'_n\}$ が正数列であるならば、$a'_n\leqq 1$ かつ $a'_n=a_n$ でなければならない。(証明終)

以上により、条件(∗)を満たす正数列 $\{a_n\}$ は、ただ 1 つである。