1967 年京大理$\boxed{5}$新文$\boxed{5}$新共通

（i）

点 P が直線 AB 上にあるとき、実数 k を用いて、$\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}$ と書けるので

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+k(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=(1-k)\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}$$

$a=1-k,\ b=k$ とおけば、$\overrightarrow{OP}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB},\ a+b=1$ と書ける。

逆に、$\overrightarrow{OP}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB},\ a+b=1$ と書けるとき、$\overrightarrow{OP}=(1-b)\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+b(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{AB}$ であり、

点 P は直線 AB 上にある。以上により、示された。（証明終）

（ii）

$$p\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB}+r\overrightarrow{OC}=p\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB}-(p+q)\overrightarrow{OC}=p(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})+q(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})=p\overrightarrow{CA}+q\overrightarrow{CB}=\vec{0}$$

$p\neq 0$ のとき、$\overrightarrow{CA}=-\dfrac{q}{p}\overrightarrow{CB}$ と書けて、$\overrightarrow{CA}$ は $\overrightarrow{CB}$ の定数倍であり、3 点 $A,\ B,\ C$ が一直線上にあるので、不適。

したがって $p=0$ でなければならず、$q\overrightarrow{CB}=\vec{0}$ である。$B=C$ とすると、3 点 $A,\ B,\ C$ が一直線上にあるので、

不適。したがって、$B\neq C$ であり、$\overrightarrow{CB}\neq\vec{0}$ であるから、$q=0$ でなければならない。

以上により、$p=q=r=0$ しかあり得ない。（証明終）

（iii）

$\overrightarrow{AQ}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ となるような実数 $x,\ y$ が、複数存在すると仮定する。

$$\overrightarrow{AQ}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}\ \text{——①}\qquad \overrightarrow{AQ}=x'\overrightarrow{AB}+y'\overrightarrow{AC}\ \text{——②}$$

①－②より　$\vec{0}=(x-x')\overrightarrow{AB}+(y-y')\overrightarrow{AC}$　（ii）の議論により、$x-x'=y-y'=0$ でなければならないから

$\therefore x=x',\ y=y'$　したがって、$\overrightarrow{AQ}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ となるような実数 $x,\ y$ は、ただ 1 組しか存在しない。

①を変形すると

$$\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OA}=x(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+y(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})\qquad \overrightarrow{OQ}=(1-x-y)\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}$$

$l=1-x-y,\ m=x,\ n=y$ とおけば、$\overrightarrow{OQ}=l\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OC},\ l+m+n=1$ となる実数 $l,\ m,\ n$ が存在し、しかも

ただ 1 通りに定まる。（証明終）

1967 年京大文 $\boxed{5}$ 旧

空間座標系において、$A(0,\ 0,\ 0),\ B(a,\ 0,\ 0),\ C(0,\ a,\ 0)$ とする。

塔の根元の座標を $P(p,\ q,\ 0)$ とすると、$AP=\sqrt{p^2+q^2}$ であり、A から塔の頂を見た仰角は $45°$ であるから、

塔の頂の座標は $H(p,\ q,\ \sqrt{p^2+q^2})$ とおける。

$\dfrac{PH}{BP}=\dfrac{PH}{CP}=\tan 30°=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より、$BP=CP$ であるから

$(p-a)^2+q^2=p^2+(q-a)^2 \quad 2a(p-q)=0 \quad p-q=0 \quad \therefore p=q$

$H(p,\ p,\ \sqrt{2}|p|)$ となるから

$\dfrac{PH}{BP}=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \quad 3PH^2=BP^2 \quad 6p^2=(p-a)^2+p^2 \quad 4p^2+2ap-a^2=0 \quad \therefore p=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}a$

塔の高さは $\sqrt{2}|p|$ であるから　$\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4}a$ または $\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{4}a$ ……(答)

なお、H の座標は、$\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}a,\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}a,\ \dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4}a\right)$ または $\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}a,\ \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}a,\ \dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{4}a\right)$ である。