1967年京大理$\boxed{5}$新文$\boxed{5}$新共通

（i）

点Pが直線AB上にあるとき、実数kを用いて、$\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}$と書けるので

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+k(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=(1-k)\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}$$

$a=1-k,\ b=k$とおけば、$\overrightarrow{OP}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB},\ a+b=1$と書ける。

逆に、$\overrightarrow{OP}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB},\ a+b=1$と書けるとき、$\overrightarrow{OP}=(1-b)\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+b(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{AB}$であり、

点Pは直線AB上にある。以上により、示された。（証明終）

（ii）

$$p\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB}+r\overrightarrow{OC}=p\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB}-(p+q)\overrightarrow{OC}=p(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})+q(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})=p\overrightarrow{CA}+q\overrightarrow{CB}=\vec{0}$$

$p\neq 0$のとき、$\overrightarrow{CA}=-\dfrac{q}{p}\overrightarrow{CB}$と書けて、$\overrightarrow{CA}$は$\overrightarrow{CB}$の定数倍であり、3点$A,\ B,\ C$が一直線上にあるので、不適。

したがって$p=0$でなければならず、$q\overrightarrow{CB}=\vec{0}$である。$B=C$とすると、3点$A,\ B,\ C$が一直線上にあるので、

不適。したがって、$B\neq C$であり、$\overrightarrow{CB}\neq\vec{0}$であるから、$q=0$でなければならない。

以上により、$p=q=r=0$しかあり得ない。（証明終）

（iii）

$\overrightarrow{AQ}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$となるような実数$x,\ y$が、複数存在すると仮定する。

$$\overrightarrow{AQ}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}\quad\text{——①}\qquad \overrightarrow{AQ}=x'\overrightarrow{AB}+y'\overrightarrow{AC}\quad\text{——②}$$

①－②より　$\vec{0}=(x-x')\overrightarrow{AB}+(y-y')\overrightarrow{AC}$　（ii）の議論により、$x-x'=y-y'=0$でなければならないから

$\therefore x=x',\ y=y'$　したがって、$\overrightarrow{AQ}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$となるような実数$x,\ y$は、ただ1組しか存在しない。

①を変形すると

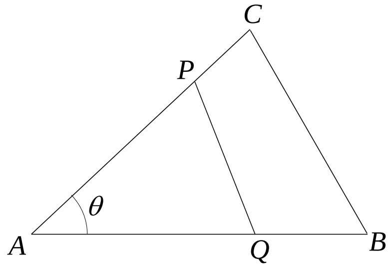
$$\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OA}=x(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+y(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})\qquad \overrightarrow{OQ}=(1-x-y)\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}$$

$l=1-x-y,\ m=x,\ n=y$とおけば、$\overrightarrow{OQ}=l\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OC},\ l+m+n=1$となる実数$l,\ m,\ n$が存在し、しかも

ただ1通りに定まる。（証明終）

1967年京大理$\boxed{5}$旧

三角形ABCにおいて、$BC=a,\ CA=b,\ AB=c,\ \angle A=\theta$とする。
辺$CA,\ AB$上にそれぞれ点$P,\ Q$があり、$AP=sb,\ AQ=tc\ (0\leqq s\leqq 1,\ 0\leqq t\leqq 1)$とする。
三角形APQの面積が三角形ABCの面積の半分になるとき



$$\frac{1}{2}stbc\sin\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}bc\sin\theta \qquad \therefore st=\frac{1}{2}$$

余弦定理より　$PQ^2=s^2b^2+t^2c^2-2sb\cdot tc\cos\theta=s^2b^2+t^2c^2-bc\cos\theta$

$\cos\theta=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$であるから　$PQ^2=s^2b^2+t^2c^2-\dfrac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)$

$s\neq 0$より　$t=\dfrac{1}{2s}$　$PQ^2=s^2b^2+\dfrac{c^2}{4s^2}-\dfrac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)$

相加平均・相乗平均の関係より　$s^2b^2+\dfrac{c^2}{4s^2}\geqq 2\sqrt{s^2b^2\cdot\dfrac{c^2}{4s^2}}=2\sqrt{\dfrac{b^2c^2}{4}}=bc$

等号が成立するには　$s^2b^2=\dfrac{c^2}{4s^2}$　$s^4=\dfrac{c^2}{4b^2}$　$\therefore s=\sqrt{\dfrac{c}{2b}},\ t=\sqrt{\dfrac{b}{2c}}$

$s=\sqrt{\dfrac{c}{2b}},\ t=\sqrt{\dfrac{b}{2c}}$のとき、$PQ^2$は最小値$bc-\dfrac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)=\dfrac{a^2-(b-c)^2}{2}$をとる。

同様にして、点$P,\ Q$が辺$AB,\ BC$上にあるとき　PQ^2の最小値は$\dfrac{b^2-(a-c)^2}{2}$

点$P,\ Q$が辺$BC,\ CA$上にあるとき　PQ^2の最小値は$\dfrac{c^2-(a-b)^2}{2}$

PQ^2の最小値は、$\dfrac{a^2-(b-c)^2}{2},\ \dfrac{b^2-(a-c)^2}{2},\ \dfrac{c^2-(a-b)^2}{2}$のうちの最小値である。

$$\frac{a^2-(b-c)^2}{2}-\frac{b^2-(a-c)^2}{2}=a^2-b^2+bc-ac=(a-b)(a+b-c)>0$$

$$\frac{b^2-(a-c)^2}{2}-\frac{c^2-(a-b)^2}{2}=b^2-c^2+ca-ab=(b-c)(b+c-a)>0$$

以上により、PQの最小値は　$\sqrt{\dfrac{c^2-(a-b)^2}{2}}=\sqrt{\dfrac{(c+a-b)(b+c-a)}{2}}$　……(答)

※1975年東大理$\boxed{1}$文$\boxed{1}$共通に類題あり。

　三角形の成立条件より、$b+c>a,\ c+a>b,\ a+b>c$である。