1967年京大理$\boxed{6}$新

（i）

$$y_1-y_3=\frac{\pi}{4}\frac{1}{x}-\frac{\pi}{4}+1-\frac{\pi}{4}(1-x)-1=\frac{\pi}{4}\left(x+\frac{1}{x}-2\right)$$

$0<x\leqq 1$のとき、相加平均・相乗平均の関係より　$x+\frac{1}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$　$\therefore x+\frac{1}{x}-2\geqq 0$

$y_1-y_3\geqq 0$であるから　$\therefore y_1\geqq y_3$　等号成立は、$x=\frac{1}{x}$のときであるから　$x^2=1$　$\therefore x=1$

$f(x)=y_3-y_2=\frac{\pi}{4}(1-x)+1-\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}x$とすると　$f'(x)=-\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\sin\frac{\pi}{4}x=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\left(\sin\frac{\pi}{4}x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$0<x\leqq 1$のとき、$0<\frac{\pi}{4}x\leqq\frac{\pi}{4}$であるから　$0<\sin\frac{\pi}{4}x\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$　$\therefore f'(x)\leqq 0$

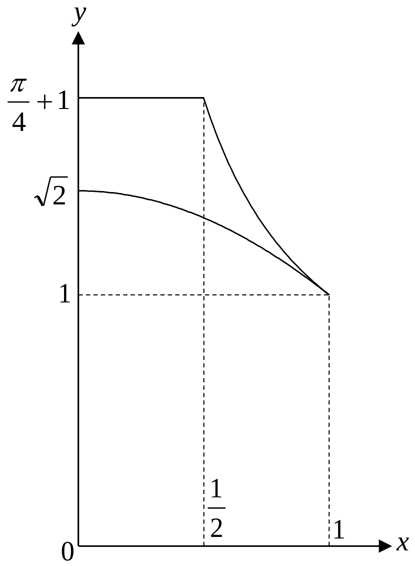
$0<x\leqq 1$において、$f(x)$は単調減少。$f(1)=0$より、$0<x\leqq 1$において$f(x)\geqq 0$であるから

$y_3-y_2\geqq 0$　$\therefore y_3\geqq y_2$　等号成立は、$x=1$のとき。

以上により、$0<x\leqq 1$において、$y_1\geqq y_3\geqq y_2$であり、等号は$x=1$のときに限り成立する。
2つのグラフは、$0<x\leqq 1$の範囲では、$(1, 1)$しか交点を持たないことが示された。（証明終）

（ii）

題意の囲まれた部分を図示すると、右図の通り。面積は



$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi}{4}+1\right)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{\pi}{4}\frac{1}{x}-\frac{\pi}{4}+1\right)dx-\sqrt{2}\int_0^1\cos\frac{\pi}{4}x\,dx$$

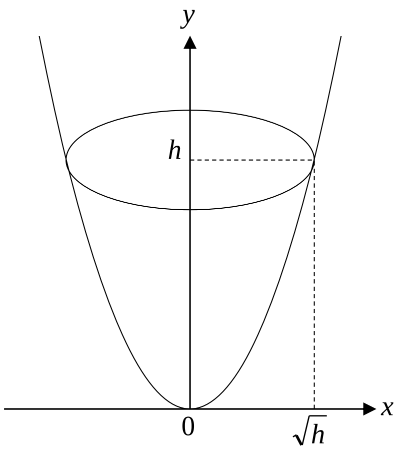
$$=\left[\left(\frac{\pi}{4}+1\right)x\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{\pi}{4}\log x+\left(1-\frac{\pi}{4}\right)x\right]_{\frac{1}{2}}^{1}-\frac{4\sqrt{2}}{\pi}\left[\sin\frac{\pi}{4}x\right]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}+1-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\log\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}\right)-\frac{4}{\pi}$$

$$=1+\frac{\pi}{4}\log 2-\frac{4}{\pi}\quad\cdots\cdots(答)$$

※y_1とy_2のグラフは、点$(1, 1)$で接している。直線y_3は、y_1とy_2の共通接線である。

1967年京大理 $\boxed{6}$ 旧



この容器に水を入れ、水面の高さが h (cm) になったとする。
このとき、水面の半径は $\sqrt{h}$ (cm)、水面の面積は πh (cm^2) であるから、

容器内の水の体積は　$\pi\int_0^h y dy = \pi\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^h = \frac{1}{2}\pi h^2$ (cm^3)

t 秒後の注入速度を $f(t)$ (cm^3/sec)、t 秒後の水面の高さを $h(t)$ (cm) とする。

t 秒後の水の体積は　$\int_0^t f(u)du = \frac{1}{2}\pi\{h(t)\}^2$

両辺を t で微分すると　$f(t) = \pi h(t)\cdot\frac{dh(t)}{dt}$

ここで、$\frac{dh(t)}{dt}$ (cm/sec) は、t 秒後の水面の上昇速度であり、t^2 に等しい。

$\frac{dh(t)}{dt} = t^2$ より　$h(t) = \frac{1}{3}t^3 + C$　$h(0) = 0$ より　$\therefore h(t) = \frac{1}{3}t^3$　$\therefore f(t) = \pi\cdot\frac{1}{3}t^3\cdot t^2 = \frac{1}{3}\pi t^5$

したがって、水の注入速度を、$\frac{1}{3}\pi t^5$ (cm^3/sec) とすればよい。……(答)