

1967年京大理 2文 2共通

(i)

$$Z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi = i \text{ より } x^2 - y^2 = 0 \text{ ——① } 2xy = 1 \text{ ——②}$$

①より $(x+y)(x-y) = 0$ であるから、 $y = x$ または $y = -x$ である。

$$y = x \text{ のとき ②に代入すると } 2x^2 = 1 \quad x^2 = \frac{1}{2} \quad \therefore x = y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y = -x \text{ のとき ②に代入すると } -2x^2 = 1 \quad x^2 = -\frac{1}{2} \quad x \text{ は実数であるから、不適。}$$

$$(i) \text{ を満たす } x, y \text{ は } (x, y) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ (複号同順)}$$

(ii)

$$\text{与式を変形すると } (Z - 2i)^2 + 2i = 0 \quad -\frac{(Z - 2i)^2}{2} = \left(\frac{Z - 2i}{\sqrt{2}i} \right)^2 = i$$

(i)より、 $\frac{Z - 2i}{\sqrt{2}i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ または $\frac{Z - 2i}{\sqrt{2}i} = -\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ であるから、

$$\frac{Z - 2i}{\sqrt{2}i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \text{ のとき } Z - 2i = i - 1 \quad Z = -1 + 3i \quad \frac{Z - 2i}{\sqrt{2}i} = -\frac{1+i}{\sqrt{2}} \text{ のとき } Z - 2i = 1 - i \quad Z = 1 + i$$

(ii)を満たす x, y は $(x, y) = (1, 1), (-1, 3)$

以上により、(i)または(ii)を満たす x, y は $(x, y) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right), (1, 1), (-1, 3)$ (複号同順) ……(答)