1967年京大理$\boxed{4}$文$\boxed{4}$共通

$$\text{方程式}\quad x^2-3y^2=1 \tag{1}$$

をみたす整数の組$(x,\ y)$を求めることを考える。(以下この方程式の整数解を単に解と略称する。)

準備のために次のことを確かめておく。

(イ)「$a,\ b,\ c,\ d$が整数であって、$a+b\sqrt{3}=c+d\sqrt{3}$ならば、$a=c,\ b=d$である」

次に$(x,\ y)$が解であれば、$(x,\ -y),\ (-x,\ y),\ (-x,\ -y)$も解であることは、方程式(1)により明らかであるから、$(x,\ y)$が共に負でない解を求めることが基本的である。それでそのような解を求める手段として

$$(2+\sqrt{3})^n=x_n+y_n\sqrt{3}, \tag{2}$$

($x_n,\ y_n$は負でない整数、$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$)とおく。そうすると、(イ)によって

$$x_0=1,\ y_0=0,\ x_1=2,\ y_2=1 \tag{3}$$

$x_2=\boxed{7},\ y_2=\boxed{4},\ x_3=\boxed{26},\ y_3=\boxed{15}$である。

一方、$(2+\sqrt{3})^2$と$(2-\sqrt{3})^2$、$(2+\sqrt{3})^3$と$(2-\sqrt{3})^3$などを比較することによって、一般に

$$(2-\sqrt{3})^n=x_n-y_n\sqrt{3},\ n=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots \tag{4}$$

であることがわかる。

(2)と(4)と、$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$とを使って、

$$1=(2+\sqrt{3})^n(2-\sqrt{3})^n=x_n{}^2-3y_n{}^2$$

となるから、(2)で定まる$(x_n,\ y_n)$は方程式(1)の解であることがわかる。とくに、$x,\ y$の一方が0となるような負でない解は、明らかに$x=1,\ y=0$で、それは(3)の$(x_0,\ y_0)$に外ならない。

次に$(x_{n-1},\ y_{n-1})$と$(x_n,\ y_n)$の関係を求めてみる$(n\geqq 1)$。

$$x_n+y_n\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^n=(x_{n-1}+y_{n-1}\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=\boxed{(2x_{n-1}+3y_{n-1})+(x_{n-1}+2y_{n-1})\sqrt{3}}$$

ゆえに、$x_n=\boxed{2x_{n-1}+3y_{n-1}},\ y_n=\boxed{x_{n-1}+2y_{n-1}}$

したがって、$(x_0,\ y_0)$から出発して、負でない解$(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2),\ \cdots\cdots,\ (x_n,\ y_n),\ \cdots\cdots$を順次求めて行くことができる。しかも$y_1<y_2<y_3<\cdots\cdots$である。

以上のことで負でない解を多数みつけたのであるが、これらで負でない解が尽くされているかどうかを次に吟味する。

いま任意の正の解$(x,\ y)\ (x>0,\ y>0)$をとると、

$$(x+\sqrt{3}y)(2-\sqrt{3})=(2x-3y)+(2y-x)\sqrt{3}$$

(ロ)「$x'=2x-3y,\ y'=2y-x$とおくとき、$(x',\ y')$も解である」

(ハ)「そして$x>x'>0,\ y>y'\geqq 0$である」

(ニ)「それで、任意の正の解$(x,\ y)$から出発して、(ロ)における$(x',\ y')$を求める操作を順次行うことによって、(3)に示す負でない解$(x_0,\ y_0)$に達する」

(ホ)「したがって、任意の負でない$(x,\ y)$は式(2)によって定まる$(x_n,\ y_n)\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$のどれか1つである」

(イ)の証明

a, b, c, d が整数であって、$a+b\sqrt{3}=c+d\sqrt{3}$ であるとき　$a-c=(d-b)\sqrt{3}$

$d-b\neq 0$ とすると、$\dfrac{a-c}{d-b}=\sqrt{3}$ となるが、右辺は無理数、左辺は有理数であるから、矛盾する。

したがって、$d-b=0$ でなければならず、$a-c=0$ であるから　$\therefore a=c,\ b=d$　(証明終)

※$\sqrt{3}$ が無理数であることの証明は、必要だろうか？

(ロ)の証明

$$x'^2-3y'^2=(2x-3y)^2-3(2y-x)^2=4x^2-12xy+9y^2-3(4y^2-4xy+x^2)=x^2-3y^2=1$$

したがって、$x'^2-3y'^2=1$ が成立するから、$(x',\ y')$ も解である。　(証明終)

(ハ)の証明

$x'=2x-3y\leqq 0$ とすると　$3y\geqq 2x$　$y\geqq\dfrac{2}{3}x$　このとき、$x^2-3y^2\leqq x^2-3\cdot\dfrac{4}{9}x^2=-\dfrac{1}{3}x^2<0$ となり、不適。

したがって、$x'=2x-3y>0$ であり、$y<\dfrac{2}{3}x<x$ より、$y<x$ である。

$x-x'=x-(2x-3y)=3y-x\leqq 0$ とすると　$x\geqq 3y$

$1=x^2-3y^2\geqq 9y^2-3y^2=6y^2$ より $y^2\leqq\dfrac{1}{6}$ となるが、y は正の整数であり、不適。

したがって、$x-x'>0$ であり、$x>x'>0$ が成立する。　(証明終)

$y'=2y-x<0$ とすると　$x>2y$

$1=x^2-3y^2>4y^2-3y^2=y^2$ より $y^2<1$ となるが、y は正の整数であり、不適。したがって、$y'\geqq 0$ である。

$y-y'=y-(2y-x)=x-y$ であるが、$y<x$ であるから $y-y'=x-y>0$ である。

したがって、$y>y'\geqq 0$ が成立する。　(証明終)

(ニ)の証明

任意の正の解 $(x,\ y)$ から出発して、(ロ)における $(x',\ y')$ を求める操作を行い、それを新たな $(x,\ y)$ とする。

このような操作を順次行うと、(ハ)により、x と y の値は小さくなっていく。やがて、$y'=0$ に達するから、

任意の正の解 $(x,\ y)$ から出発して、$(x_0,\ y_0)$ に達する。　(証明終)

(ホ)の証明

$x'=2x-3y,\ y'=2y-x$ を、$x,\ y$ について解くと　$x=2x'+3y',\ y=x'+2y'$

これは、前述の漸化式 $x_n=2x_{n-1}+3y_{n-1},\ y_n=x_{n-1}+2y_{n-1}$ に等しい。すなわち、任意の正の解 $(x,\ y)$ から出発して $(x_0,\ y_0)$ に達することから、逆に $(x_0,\ y_0)$ から出発して任意の正の解 $(x,\ y)$ に達することがわかる。

したがって、任意の負でない解 $(x,\ y)$ は、式(2)によって定まる $(x_n,\ y_n)$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ のどれか 1 つである。

(証明終)