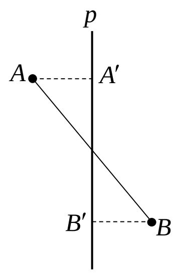
1968 年京大文 $\boxed{4}$

(1)

2 点 A, B から、平面 p に下ろした垂線の足を、 A', B' とする。 $AA' = BB'$ とすると



$A' = B'$ であるとき、 $A' = B'$ は、線分 AB の中点である。

$A' \neq B'$ であるとき、線分 AB の中点は、線分 $A'B'$ の中点に一致する。

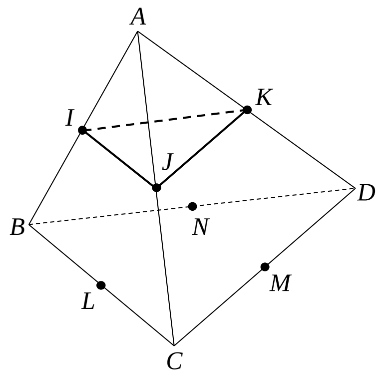
いずれにしても、 p は線分 AB の中点を通る。(証明終)

(2)

4 点 A, B, C, D は同じ平面上にないから、これら 4 点は四面体をなす。

四面体 $ABCD$ の 6 辺 AB, AC, AD, BC, CD, DB の中点を、 I, J, K, L, M, N とする。

4 点 A, B, C, D から、平面 p に下ろした垂線の足を、 A', B', C', D' とする。



p が 3 点 I, J, K を通るとき

AB の中点を通るから　$AA' = BB'$　AC の中点を通るから　$AA' = CC'$

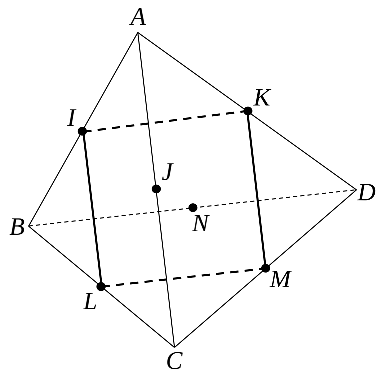
AD の中点を通るから　$AA' = DD'$　$\therefore AA' = BB' = CC' = DD'$

同様に、 p が 3 点 I, L, N を通るとき、 p が 3 点 J, L, M を通るとき、

p が 3 点 K, M, N を通るときも、 $AA' = BB' = CC' = DD'$ が成立する。

次に、4 点 I, K, L, M を通る平面が存在することを示す。

中点連結定理により、 $AC \parallel IL$ 、 $AC \parallel KM$ であるから、 $IL \parallel KM$ である。



$IL = KM = \dfrac{1}{2}AC$ より、4 点 I, K, L, M は、同じ平面上にあり、平行四辺形を

なす。これより、 p が 4 点 I, K, L, M を通るとき

AB の中点を通るから　$AA' = BB'$　BC の中点を通るから　$BB' = CC'$

CD の中点を通るから　$CC' = DD'$　DA の中点を通るから　$DD' = AA'$

$\therefore AA' = BB' = CC' = DD'$

同様に、 p が 4 点 J, K, L, N を通るとき、 p が 4 点 I, J, M, N を通るときも、

$AA' = BB' = CC' = DD'$ が成立する。

以上により、4 点 A, B, C, D から等距離にある平面は、7 つ。……(答)