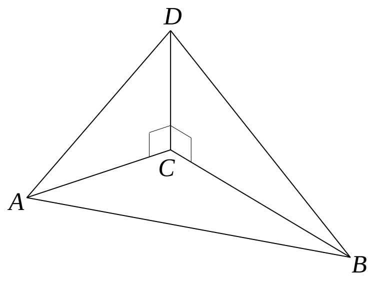
1968 年京大理 $\boxed{4}$



$\angle ACB=\theta_1$, $\angle ADB=\theta_2$ とする。余弦定理により

$$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos\theta_1=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cos\theta_2$$

$AD^2=AC^2+CD^2$, $BD^2=BC^2+CD^2$ であるから

$$AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos\theta_1=AC^2+BC^2+2CD^2-2AD\cdot BD\cos\theta_2$$

$$-2AC\cdot BC\cos\theta_1=2CD^2-2AD\cdot BD\cos\theta_2 \quad \therefore \cos\theta_2=\frac{CD^2+AC\cdot BC\cos\theta_1}{AD\cdot BD}$$

これより　$\cos\theta_2-\cos\theta_1=\dfrac{CD^2+AC\cdot BC\cos\theta_1}{AD\cdot BD}-\cos\theta_1=\dfrac{CD^2+(AC\cdot BC-AD\cdot BD)\cos\theta_1}{AD\cdot BD}$

ここで、$AC\cdot BC-AD\cdot BD<0$ であり、$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta_1<\pi$ より、$-1<\cos\theta_1\leqq 0$ であるから

$$(AC\cdot BC-AD\cdot BD)\cos\theta\geqq 0 \quad \therefore \cos\theta_2-\cos\theta_1\geqq\frac{CD^2}{AD\cdot BD}>0 \quad \therefore \cos\theta_2>\cos\theta_1$$

$0<\theta<\pi$ の範囲で、$\cos\theta$ は単調減少であるから　$\therefore \theta_2<\theta_1$　（証明終）