1968年京大理 $\boxed{5}$

$P(x,\ x^2),\ A\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right),\ B\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{9}{4}\right)$ より

$$PA^2+PB^2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)^2+\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(x^2-\frac{9}{4}\right)^2$$

$$=x^2+x+\frac{1}{4}+x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{16}+x^2-3x+\frac{9}{4}+x^4-\frac{9}{2}x^2+\frac{81}{16}$$

$$=2x^4-3x^2-2x+\frac{61}{8}$$ ……(答)

$f(x)=2x^4-3x^2-2x+\dfrac{61}{8}$ とすると

$f'(x)=8x^3-6x-2=2(x-1)(2x+1)^2 \qquad f''(x)=24x^2-6=6(2x-1)(2x+1)$

$f(x)$ の増減、凹凸は右の通り。

$x=1$ において極小値を持ち、 $x=-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}$ において変曲点を持つ。

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	−	−	−	0	＋
$f''(x)$	＋	0	−	0	＋	＋	＋
$f(x)$	↘		↘		↘		↗

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{8}-\dfrac{3}{4}+1+\dfrac{61}{8}=8 \qquad f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{8}-\dfrac{3}{4}-1+\dfrac{61}{8}=6$

$f(1)=2-3-2+\dfrac{61}{8}=\dfrac{37}{8}$

$f(x)$ のグラフの概形は、右図の通り。