1969年京大理 $\boxed{1}$

（イ）

$f(x)=x^3\left(1+\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x^2}+\dfrac{c}{x^3}\right)$ より、 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ であるから、 $f(x)=0$ は少なくとも 1 つの実数解を持つ。この実数解を α とすれば、 $f(\alpha)=0$ であり、 $f(\alpha)$ は $x-\alpha$ を因数に持つ。

すなわち、 $f(x)=(x+A)(x^2+Bx+C)$ となるような実数 $A,\ B,\ C$ がある。（証明終）

（ロ）

$f(x)=0$ の 3 解（重解を含む）が、すべて負の実数であるとき、それらを $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とすると、

解と係数より　$\alpha+\beta+\gamma=-a,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b,\ \alpha\beta\gamma=-c$

$\alpha<0,\ \beta<0,\ \gamma<0$ であるから　$a=-(\alpha+\beta+\gamma)>0,\ b=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha>0,\ c=-\alpha\beta\gamma>0$

したがって、 $a,\ b,\ c$ はすべて正である。

$f(x)=0$ が、虚数解を持つとき

$f(x)=(x+A)(x^2+Bx+C)$ となるような実数 $A,\ B,\ C$ があり、 $x=-A$ は実数解で、 $-A<0$ より $A>0$ である。

$x^2+Bx+C=0$ は虚数解を持ち。このとき、判別式は $D=B^2-4C<0$ であるが、 $C\leqq 0$ であれば $D\geqq 0$ となるから、 $C>0$ である。

$B^2-4C<0,\ C>0$ の条件下で、 $x^2+Bx+C=0$ の解は、 $x=\dfrac{-B\pm\sqrt{4C-B^2}\,i}{2A}$ である。

この実数部分は、 $-\dfrac{B}{2A}<0$ であり、 $A>0$ であるから、 $B>0$ である。

ここで、 $f(x)=(x+A)(x^2+Bx+C)=x^3+(A+B)x^2+(AB+C)x+AC$ より、 $a=A+B,\ b=AB+C,\ c=AC$ であり、 $A>0,\ B>0,\ C>0$ であるから、 $a,\ b,\ c$ はすべて正である。

以上により、示された。（証明終）