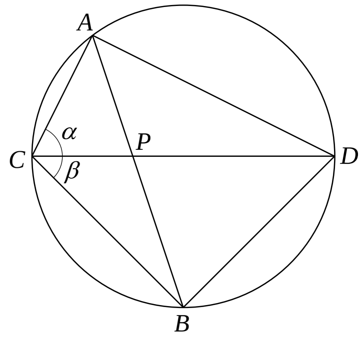
1969年京大理 $\boxed{2}$



CDは円の直径であり、$\angle CAD$, $\angle CBD$は直角であるから

$$\tan\alpha=\frac{DA}{CA},\ \tan\beta=\frac{DB}{CB}\qquad \tan\alpha\cdot\tan\beta=\frac{DA\cdot DB}{CA\cdot CB} \text{ ——①}$$

$\triangle ACB=\dfrac{1}{2}CA\cdot CB\sin(\alpha+\beta)$であり、

$\triangle ADB=\dfrac{1}{2}DA\cdot DB\sin(\pi-\alpha-\beta)=\dfrac{1}{2}DA\cdot DB\sin(\alpha+\beta)$ であるから

$$\frac{\triangle ADB}{\triangle ACB}=\frac{DA\cdot DB}{CA\cdot CB} \text{ ——②}$$

次に、A, B からCDに下ろした垂線の長さを、それぞれk, lとすると

$$\triangle ACP=\frac{1}{2}k\,CP,\ \triangle ADP=\frac{1}{2}k\,DP\qquad \triangle BCP=\frac{1}{2}l\,CP,\ \triangle BDP=\frac{1}{2}l\,DP$$

$$\triangle ACB=\frac{1}{2}(k+l)CP,\ \triangle ADB=\frac{1}{2}(k+l)DP\qquad \frac{\triangle ADB}{\triangle ACB}=\frac{DP}{CP} \text{ ——③}$$

以上、①～③より　$\therefore \tan\alpha\cdot\tan\beta=\dfrac{\triangle ADB}{\triangle ACB}=\dfrac{DP}{CP}$　（証明終）