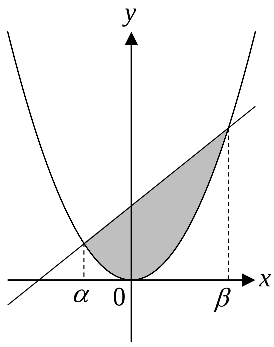
1970 年京大文 $\boxed{5}$



$b=2a-2$ である。 $x^2=2ax-b=2ax-(2a-2)$ とすると

$$x^2-2ax+2a-2=0 \qquad D/4=a^2-(2a-2)=(a-1)^2+1>0$$

すべての実数 a について、 $x^2-2ax+2a-2=0$ は、相違なる 2 実数解を持つから、これを $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると、解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=2a,\ \alpha\beta=2a-2 \quad \text{——①}$$

求める面積は

$$S=\int_\alpha^\beta\left\{(2ax-2a+2)-x^2\right\}dx=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)\left\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\right\}dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta\left\{(x-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(x-\alpha)\right\}dx=-\left[\frac{(x-\alpha)^3}{3}-(\beta-\alpha)\cdot\frac{(x-\alpha)^2}{2}\right]_\alpha^\beta$$

$$=-\frac{(\beta-\alpha)^3}{3}+\frac{(\beta-\alpha)^3}{2}=\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$$

ここで、①より、 $(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4a^2-4(2a-2)=4(a^2-2a+2)$ であるから

$$\therefore S=\frac{8}{6}(a^2-2a+2)^{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}(a^2-2a+2)^{\frac{3}{2}} \quad \cdots\cdots(答)$$

$S=\dfrac{4}{3}\left\{(a-1)^2+1\right\}^{\frac{3}{2}}$ であるから、 S を最小にする a は　$\therefore a=1$　……(答)