1970年京大理$\boxed{1}$

$a \neq c$ であるから、$(a,\ f(a))$ と $(c,\ 0)$ を通る直線は、傾きを持つ。
すなわち、$y = f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線は、傾きを持つから、微分係数 $f'(a)$ が存在する。
接線の方程式は　$y = f'(a)(x-a) + f(a)$　$(c,\ 0)$ を通るから　$0 = f'(a)(c-a) + f(a)$ ——①

$g(x)$ の $x = a$ における微分係数は

$$g'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{f(a+h)}{a+h-c} - \dfrac{f(a)}{a-c}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(a-c)f(a+h) - (a+h-c)f(a)}{h(a+h-c)(a-c)} = \lim_{h \to 0} \frac{(a-c)\{f(a+h) - f(a)\} - hf(a)}{h(a+h-c)(a-c)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{(a+h-c)(a-c)} \left\{ (a-c) \cdot \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f(a) \right\} = \frac{(a-c)f'(a) - f(a)}{(a-c)^2}$$

①より、$(a-c)f'(a) - f(a) = 0$ であるから　$\therefore g'(a) = 0$ ……(答)

(注)
$y = f(x)$ 上のある点において、接線が存在するが微分不可能という場合もあり得る。
例えば、$y = \sqrt[3]{x}$ は、$(0,\ 0)$ において接線 $x = 0$ が存在するが、$x = 0$ において微分不可能である。
微分可能性について、一言触れておくのがよいと思われる。