

1970 年京大理 3

$A_1A_2 : A_2A_3 = B_1B_2 : B_2B_3 = t : 1-t$ ($0 < t < 1$) とおける。各点の、原点 O を基準とした位置ベクトルを考える。

$\overrightarrow{OA_2} = (1-t)\overrightarrow{OA_1} + t\overrightarrow{OA_3}$, $\overrightarrow{OB_2} = (1-t)\overrightarrow{OB_1} + t\overrightarrow{OB_3}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM_2} &= \frac{\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OB_2}}{2} = (1-t)\frac{\overrightarrow{OA_1}}{2} + t\frac{\overrightarrow{OA_3}}{2} + (1-t)\frac{\overrightarrow{OB_1}}{2} + t\frac{\overrightarrow{OB_3}}{2} = (1-t)\frac{\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1}}{2} + t\frac{\overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OB_3}}{2} \\ &= (1-t)\overrightarrow{OM_1} + t\overrightarrow{OM_3}\end{aligned}$$

これより、 $M_1M_2 : M_2M_3 = t : 1-t$ であり、点 M_2 は、線分 M_1M_3 を $t : 1-t$ に内分する。
すなわち、3 点 M_1, M_2, M_3 は、一直線上にある。(証明終)