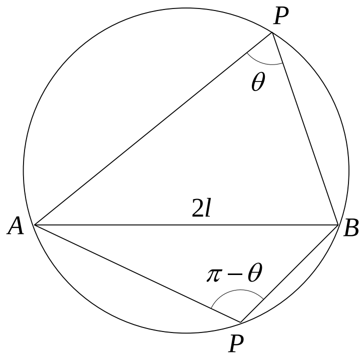
1970 年京大理 $\boxed{4}$



動点 P が、A または B と一致するとき、$AP \cdot BP = 0$ であるから、
$P \neq A,\ P \neq B$ として考える。

円周角の定理により、$\sin\angle APB$ は一定である。

正弦定理により　$\dfrac{2l}{\sin\angle APB} = 2r$　$\therefore \sin\angle APB = \dfrac{l}{r}$

$\triangle APB$ の面積は　$S = \dfrac{1}{2} AP \cdot BP \sin\angle APB = \dfrac{l}{2r} AP \cdot BP$

一方、点 P と定弦 AB の距離を h とすると、$\triangle APB$ の面積は、$S = \dfrac{1}{2} \cdot 2l \cdot h = lh$ であるから

$lh = \dfrac{l}{2r} AP \cdot BP$　$h = \dfrac{1}{2r} AP \cdot BP$

$AP \cdot BP = 2r(r - \sqrt{r^2 - l^2})$ であるとき　$\therefore h = r - \sqrt{r^2 - l^2}$

$AP \cdot BP = 2r(r - \sqrt{r^2 - l^2})$ となるのは、点 P と定弦 AB の距離が、$r - \sqrt{r^2 - l^2}$ であるとき。……(答)

(注)

$\sqrt{r^2 - l^2}$ は、定弦 AB と、円の中心との距離である。

$AP \cdot BP = 2r(r - \sqrt{r^2 - l^2})$ となる点 P は、$0 < l < r$ であれば 3 つ存在し、$l = r$ であれば 2 つ存在する。