1970 年京大理 $\boxed{5}$

$F'(x)=x\sin^3 x$ で、$\sin^3 x$ の符号と $\sin x$ の符号は等しいから、$F'(x)$ の符号は $\sin x$ の符号に等しい。
k を自然数として、$2(k-1)\pi<x<(2k-1)\pi$ のとき $F'(x)>0$、$(2k-1)\pi<x<2k\pi$ のとき $F'(x)<0$ であり、
$x=(2k-1)\pi,\ 2k\pi$ のとき $F'(x)=0$ であるから、$F(x)$ は $x=(2k-1)\pi$ のとき極大となる。

$$
\begin{aligned}
F((2k-1)\pi)&=\int_0^{(2k-1)\pi} t\sin^3 t\,dt=\int_0^{(2k-1)\pi} t(1-\cos^2 t)\sin t\,dt=\int_0^{(2k-1)\pi} t\left(\frac{1}{3}\cos^3 t-\cos t\right)' dt\\
&=\left[t\left(\frac{1}{3}\cos^3 t-\cos t\right)\right]_0^{(2k-1)\pi}-\int_0^{(2k-1)\pi}\left(\frac{1}{3}\cos^3 t-\cos t\right)dt\\
&=(2k-1)\pi\cdot\left(-\frac{1}{3}+1\right)-\int_0^{(2k-1)\pi}\left(\frac{1}{3}\cos^2 t-1\right)\cos t\,dt\\
&=\frac{2}{3}(2k-1)\pi-\int_0^{(2k-1)\pi}\left(-\frac{1}{3}\sin^2 t-\frac{2}{3}\right)\cos t\,dt=\frac{2}{3}(2k-1)\pi+\frac{1}{3}\int_0^{(2k-1)\pi}(\sin^2 t+2)\cos t\,dt\\
&=\frac{2}{3}(2k-1)\pi+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\sin^3 t+2\sin t\right]_0^{(2k-1)\pi}=\frac{2}{3}(2k-1)\pi
\end{aligned}
$$

以上により、k を自然数として、$x=(2k-1)\pi$ のとき、極大値 $\dfrac{2}{3}(2k-1)\pi$ をとる。……(答)