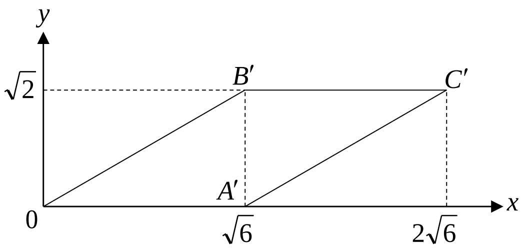
1971 年京大文 $\boxed{5}$

（i）

この正方形の、xy 平面への正射影を考える。

3 頂点の xy 平面への正射影を、$O(0,\ 0),\ A'(\sqrt{6},\ 0),\ B'\left(t,\ \dfrac{t}{\sqrt{3}}\right)$ $(t>0)$ とする。



このとき、$\angle A'OB'=30^\circ$ であるから、$OB'=2\sqrt{2}$ より

$$t^2+\frac{t^2}{3}=\frac{4}{3}t^2=8 \quad t^2=6 \quad \therefore t=\sqrt{6}$$

$B'(\sqrt{6},\ \sqrt{2})$ であり、もう 1 つの頂点の正射影は、
$C'(2\sqrt{6},\ \sqrt{2})$ となる。
求める対角線の長さは、$A'B',\ OC'$ の長さであるから　$\sqrt{2},\ \sqrt{26}$ ……(答)

（ii）

元の正方形の 1 頂点は、xy 平面上にあるとしてもよい。
元の正方形の 3 頂点を、$O(0,\ 0,\ 0),\ A(\sqrt{6},\ 0,\ a),\ B(\sqrt{6},\ \sqrt{2},\ b)$ とする。
$OA^2=OB^2$ より　$6+a^2=6+2+b^2$　$a^2=b^2+2$ ——①

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ より　$6+ab=0$ ——②

②より　$b=-\dfrac{6}{a}$　①に代入して　$a^2=\dfrac{36}{a^2}+2$　$a^4-2a^2-36=0$　$a^2>0$ より　$a^2=1+\sqrt{37}$

$OA^2=7+\sqrt{37}$ であるから、これが元の正方形の面積に等しい。求める面積は　$\therefore 7+\sqrt{37}$ ……(答)

なお、$(a,\ b)=\left(\pm\sqrt{1+\sqrt{37}},\ \mp\sqrt{-1+\sqrt{37}}\right)$ (複号同順) である。