1971 年京大理 $\boxed{6}$

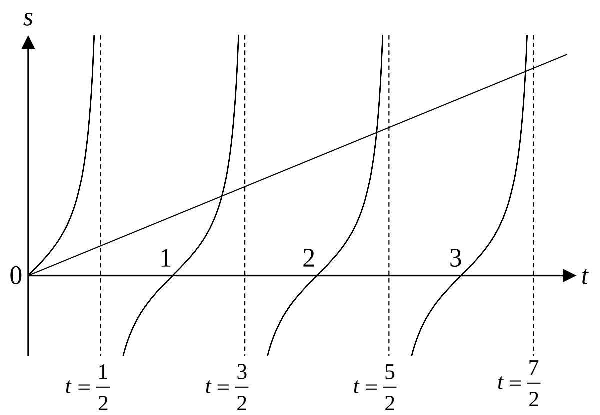
（i）

$t\,(t \geqq 0)$ における、P, Q の座標を、それぞれ $(\cos\pi t, \sin\pi t), (a, vt)$ とする。

$\cos\pi t = 0$ のとき、P は y 軸上にあり、3 点 O, P, Q が一直線上に並ぶことはない。

$t > 0$ において 3 点 O, P, Q が一直線上に並ぶとき、OP と OQ の傾きが一致するから　$\therefore \tan\pi t = \dfrac{vt}{a}$

t_n は、$t \geqq 0$ における、$s = \tan\pi t$ と、$s = \dfrac{v}{a}t$ のグラフの交点の t 座標に等しい。



右図より、$n \geqq 1$ のとき、$n \leqq t \leqq n+1$ における交点は、ただ 1 つである。すなわち、時刻 t_n はただ 1 回である。

$0 \leqq t \leqq 1$ のときを考える。$0 < v < a\pi$ より　$0 < \dfrac{v}{a} < \pi$

$f(t) = \tan\pi t$ とすると　$f'(t) = \dfrac{\pi}{\cos^2 \pi t}$　$f'(0) = \pi$

$0 \leqq t < \dfrac{1}{2}$ において、$s = \tan\pi t$ は下に凸であるから、

$s = \tan\pi t$ と、$s = \dfrac{v}{a}t$ のグラフの共有点は、$t = 0$ のときのみである。

すなわち、$0 \leqq t \leqq 1$ において、時刻 t_0 は $t_0 = 0$ のみで、ただ 1 回である。

以上により、$n \geqq 0$ のとき、$n \leqq t \leqq n+1$ において、時刻 t_n はただ 1 回である。（証明終）

（ii）

（i）のグラフより、$n \leqq t_n < n + \dfrac{1}{2}$ であり、n が増していくと、t_n は漸近線 $t = n + \dfrac{1}{2}$ に近づいていく。

すなわち、$t_n - n$ は、一定値 $\dfrac{1}{2}$ に近づく。（証明終）