1971年京大理$\boxed{2}$文$\boxed{2}$共通

※2016. 3. 17　十分性の論証を訂正。

（必要性）　$z+\alpha\bar{z}+\beta=0$ を満たす z が存在する　$\Rightarrow$　$\beta=\alpha\bar{\beta}$

$z+\alpha\bar{z}+\beta=0$ より　$\alpha\bar{z}=-(z+\beta)$　$|\alpha||\bar{z}|=|z|=|z+\beta|$

$$|z+\beta|^2=(z+\beta)(\overline{z+\beta})=(z+\beta)(\bar{z}+\bar{\beta})=z\bar{z}+\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+\beta\bar{\beta}=|z|^2+\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+|\beta|^2=|z|^2$$

$$\therefore \bar{\beta}z+\beta\bar{z}+|\beta|^2=0 \text{ ——①}$$

一方、$z+\alpha\bar{z}+\beta=0$ の両辺に $\bar{\beta}$ をかけると

$$\bar{\beta}z+\alpha\bar{\beta}\bar{z}+\beta\bar{\beta}=0 \quad \therefore \bar{\beta}z+\alpha\bar{\beta}\bar{z}+|\beta|^2=0 \text{ ——②}$$

①－②より　$(\beta-\alpha\bar{\beta})\bar{z}=0$　$z\neq 0$ であれば、$\bar{z}\neq 0$ であるから、$\beta=\alpha\bar{\beta}$ が成立する。

$z=0$ であれば、$\bar{z}=0$ であるから、$\beta=0$。このとき、$\bar{\beta}=0$ で、$\beta=\alpha\bar{\beta}$ が成立する。

（十分性）　$\beta=\alpha\bar{\beta}$　$\Rightarrow$　$z+\alpha\bar{z}+\beta=0$ を満たす z が存在する

$\beta=\alpha\bar{\beta}$ のとき　$\beta=|\beta|e^{ib}$ とすると　$\alpha=\dfrac{\beta}{\bar{\beta}}=e^{i2b}$

$$z+\alpha\bar{z}+\beta=z+\alpha\bar{z}+\alpha\bar{\beta}=z+e^{i2b}\bar{z}+|\beta|e^{ib}=e^{ib}(e^{-ib}z+e^{ib}\bar{z}+|\beta|)$$

$w=e^{-ib}z$ とすると　$z+\alpha\bar{z}+\beta=e^{ib}(w+\bar{w}+|\beta|)$

$w=-\dfrac{1}{2}|\beta|+iq$ ととれば、$z+\alpha\bar{z}+\beta=0$ となる。q は任意の実数である。

$\beta=\alpha\bar{\beta}$ のとき、$z+\alpha\bar{z}+\beta=0$ を満たす z として、$z=\left(-\dfrac{1}{2}|\beta|+iq\right)e^{ib}=\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{q}{|\beta|}\right)|\beta|e^{ib}$ がとれる。

すなわち、q を任意の実数として、$z=\left(-\dfrac{1}{2}+iq\right)\beta$ ととればよい。

以上により示された。（証明終）