1972年京大文 $\boxed{4}$

$f(x)=x^3-ax^2+ax-\dfrac{a^2}{9}$ とすると　$f'(x)=3x^2-2ax+a$

$f'(x)=0$ が相違なる 2 実数解を持つとき　$D/4=a^2-3a=a(a-3)>0$　$\therefore a<0,\ 3<a$ ——①

①の条件下で、$f'(x)=0$ の解を $\alpha,\ \beta\,(\alpha<\beta)$ とすると、解と係数の関係より　$\alpha+\beta=\dfrac{2}{3}a,\ \alpha\beta=\dfrac{1}{3}a$

このとき、$f(x)$ の増減は右の通り。
$x=\alpha$ において極大、$x=\beta$ において極小となる。
$f(x)=0$ が相違なる 3 実数根を持つ条件は、$f(\alpha)$ と $f(\beta)$ の符号が異なることである。すなわち、$f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$ であればよい。

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

$$f(x)=\left(x-\frac{1}{3}a\right)\left(x^2-\frac{2}{3}ax+\frac{1}{3}a\right)+\left(-\frac{2}{9}a^2+\frac{2}{3}a\right)x=\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{3}a\right)f'(x)+\left(-\frac{2}{9}a^2+\frac{2}{3}a\right)x \text{ より}$$

$$f(\alpha)=\left(-\frac{2}{9}a^2+\frac{2}{3}a\right)\alpha,\ f(\beta)=\left(-\frac{2}{9}a^2+\frac{2}{3}a\right)\beta$$

$$f(\alpha)\cdot f(\beta)=\left(-\frac{2}{9}a^2+\frac{2}{3}a\right)^2\alpha\beta=\frac{2a^2(a-3)^2}{81}\cdot\frac{1}{3}a=\frac{2}{243}a^3(a-3)^2<0 \quad \therefore a<0 \text{ ——②}$$

①、②より、求める必要十分条件は　$\therefore a<0$ ……(答)