1972年京大文 $\boxed{6}$

(i)

$f(x)=\dfrac{1}{9}(10-x^2)x$ とすると　$f'(x)=\dfrac{1}{9}(10-3x^2)$　$0<x<\dfrac{3}{2}$ において $f'(x)>0$ であり、単調増加である。

数学的帰納法により、すべての n について、$0<u_n<\dfrac{3}{2}$ を示す。

$0<u_1<\dfrac{3}{2}$ であるから、$n=1$ のとき成立。

$n=k$ のとき、$0<u_k<\dfrac{3}{2}$ と仮定すると、$u_{k+1}=f(u_k)$ であるから　$0<u_{k+1}<f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{93}{72}<\dfrac{3}{2}$

したがって、$n=k+1$ でも成立。以上により示された。(証明終)

(ii)

$$u_{n+1}-u_n=\frac{(10-u_n{}^2)u_n-9u_n}{9}=\frac{u_n(1-u_n{}^2)}{9} \quad \text{——①}$$

$u_1<u_2$ のとき　$u_2-u_1>0$　$1-u_1{}^2>0$　$\therefore 0<u_1<1$

$0<u_1<1$ のとき、すべての n について、$0<u_n<1$ を示す。$n=1$ のとき成立。

$n=k$ のとき、$0<u_k<1$ と仮定すると、$u_{k+1}=f(u_k)$ であるから　$0<u_{k+1}<f(1)=1$　$\therefore 0<u_{k+1}<1$

したがって、$n=k+1$ でも成立。

すべての n について、$0<u_n<1$ であるから、①より　$u_{n+1}-u_n>0$　$\therefore u_n<u_{n+1}$

$u_1>u_2$ のとき　$u_2-u_1<0$　$1-u_1{}^2<0$　$\therefore 1<u_1$

$1<u_1$ のとき、すべての n について、$1<u_n$ を示す。$n=1$ のとき成立。

$n=k$ のとき、$1<u_k$ と仮定すると、$u_{k+1}=f(u_k)$ であるから　$1=f(1)<u_{k+1}$　$\therefore 1<u_{k+1}$

したがって、$n=k+1$ でも成立。

すべての n について、$1<u_n$ であるから、①より　$u_{n+1}-u_n<0$　$\therefore u_n>u_{n+1}$

以上により、(ii)が示された。(証明終)