1972 年京大理 [2]

$$\frac{t}{(t+1)(t+3)}=\frac{t+1-1}{(t+1)(t+3)}=\frac{1}{t+3}-\frac{1}{(t+1)(t+3)}=\frac{1}{t+3}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+3}\right)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t+1}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{t+3}$$

$$F(x)=\int_0^x\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t+1}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{t+3}\right)dt=\left[-\frac{1}{2}\log(t+1)+\frac{3}{2}\log(t+3)\right]_0^x=-\frac{1}{2}\log(x+1)+\frac{3}{2}\log(x+3)-\frac{3}{2}\log 3$$

$$F(x)-\log x=-\frac{1}{2}\log(x+1)-\log x+\frac{3}{2}\log(x+3)-\frac{3}{2}\log 3=\log\frac{(x+3)\sqrt{x+3}}{x\sqrt{x+1}}-\frac{3}{2}\log 3$$

$$=\log\frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)\sqrt{1+\frac{3}{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}-\frac{3}{2}\log 3$$

$x\to+\infty$ のとき、$\log\dfrac{\left(1+\frac{3}{x}\right)\sqrt{1+\frac{3}{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\to\log 1=0$ であるから　$\therefore \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[F(x)-\log x\right]=-\frac{3}{2}\log 3$ ……（答）