1973 年京大文 $\boxed{5}$

$f(x)=ax^2+bx+c$ において、 $f(0)>0$ であるから　$\therefore c>0$

$(1, 1)$ および $(3, 5)$ を通るので　$a+b+c=1$ ――①　$9a+3b+c=5$ ――②

①、②を a, b について解く。

②－①×3 より　$6a-2c=2$　$\therefore a=\dfrac{c+1}{3}$

①×9－②より　$6b+8c=4$　$\therefore b=-\dfrac{4c-2}{3}$

$c>0$ より $a>0$ であるから、 $y=f(x)$ は下に凸である。

$$f(x)=\frac{c+1}{3}x^2-\frac{4c-2}{3}x+c=\frac{c+1}{3}\left(x^2-\frac{4c-2}{c+1}x\right)+c=\frac{c+1}{3}\left(x-\frac{2c-1}{c+1}\right)^2+c-\frac{(2c-1)^2}{3(c+1)}$$

$$=\frac{c+1}{3}\left(x-\frac{2c-1}{c+1}\right)^2+\frac{3c(c+1)-(4c^2-4c+1)}{3(c+1)}=\frac{c+1}{3}\left(x-\frac{2c-1}{c+1}\right)^2+\frac{-c^2+7c-1}{3(c+1)}$$

$f(x)$ は、 $x=\dfrac{2c-1}{c+1}$ のとき、最小値 $\dfrac{-c^2+7c-1}{3(c+1)}$ をとる。 $g(c)=-\dfrac{c^2-7c+1}{3(c+1)}$ とおくと

$$g'(c)=-\frac{(2c-7)(c+1)-(c^2-7c+1)}{3(c+1)^2}=-\frac{c^2+2c-8}{3(c+1)^2}=-\frac{(c+4)(c-2)}{3(c+1)^2}$$

$c>0$ における $g(c)$ の増減は右の通りで、 $c=2$ において最大となる。

このとき、 $a=1,\ b=-2$ である。

c	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(c)$		＋	0	－
$g(c)$		↗		↘

求める a, b, c は　$\therefore a=1,\ b=-2,\ c=2$　……(答)