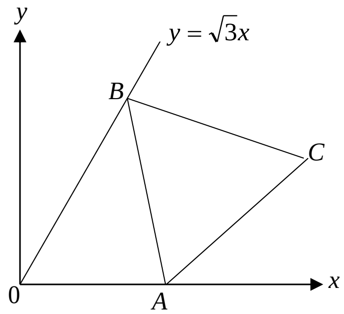
1973 年京大理 $\boxed{3}$

（解答 1）座標をおく



座標平面において、$O(0,\ 0),\ A(a,\ 0),\ B\left(\frac{1}{2}b,\ \frac{\sqrt{3}}{2}b\right)$ とする。

$\left|\vec{a}\right|=a,\ \left|\vec{b}\right|=b$ である。このとき、

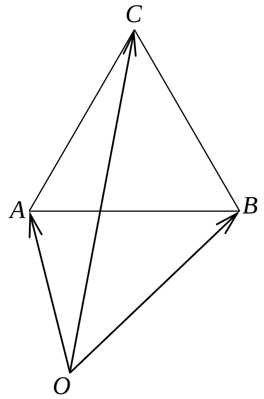
$\overrightarrow{BA}=\begin{pmatrix} a-\frac{1}{2}b \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}b \end{pmatrix}$ であるから　$\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-\frac{1}{2}b \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a+b) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}(a-b) \end{pmatrix}$　$\therefore \vec{c}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}a+b \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a \end{pmatrix}$

$\vec{c}=p\vec{a}+q\vec{b}=\begin{pmatrix} ap+\frac{1}{2}bq \\ \frac{\sqrt{3}}{2}bq \end{pmatrix}$ とすると　$ap+\frac{1}{2}bq=\frac{1}{2}a+b,\ \frac{\sqrt{3}}{2}bq=\frac{\sqrt{3}}{2}a$　$\therefore p=\frac{b}{a},\ q=\frac{a}{b}$

したがって、$\vec{c}=\frac{b}{a}\vec{a}+\frac{a}{b}\vec{b}$ が示された。（証明終）

※座標をおく場合、O を固定して考えると楽。

（解答 2）座標をおかない



$\vec{c}=p\vec{a}+q\vec{b},\ \left|\vec{a}\right|=a,\ \left|\vec{b}\right|=b$ とする。$\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\cos 60^\circ=\frac{1}{2}ab$ であるから

$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\left|\vec{b}-\vec{a}\right|^2=a^2+b^2-ab$

$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=\left|\vec{c}-\vec{a}\right|^2=\left|(p-1)\vec{a}+q\vec{a}\right|^2=(p-1)^2a^2+q^2b^2+q(p-1)ab$

$\left|\overrightarrow{BC}\right|^2=\left|\vec{c}-\vec{b}\right|^2=\left|p\vec{a}+(q-1)\vec{a}\right|^2=p^2a^2+(q-1)^2b^2+p(q-1)ab$

ここで、$p=\frac{b}{a},\ q=\frac{a}{b}$ を代入すると

$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=(b-a)^2+a^2+a(b-a)=a^2+b^2-ab=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2$　$\left|\overrightarrow{BC}\right|^2=b^2+(a-b)^2+b(a-b)=a^2+b^2-ab=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2$

したがって、$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=\left|\overrightarrow{BC}\right|^2$ であり、$\triangle ABC$ は正三角形である。

$\vec{a},\ \vec{b}$ は一次独立であるから、ベクトルの一意性により、$\vec{c}=\frac{b}{a}\vec{a}+\frac{a}{b}\vec{b}$ が示された。（証明終）

※ $p,\ q$ に関する連立方程式として解こうとすると、面倒である。逆算すればよい。