1973年京大理$\boxed{5}$

$$f(x)=1+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \qquad f'(x)=x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n} \qquad f''(x)=1+x+\cdots+x^{n-1}$$

$x=1$のとき　$f''(1)=n>0$　$-1\leqq x<1$のとき　$f''(x)=\dfrac{1-x^n}{1-x}$　$-1<x<1$ならば $f''(x)>0$ である。

$x=-1$のとき　$f''(-1)=\dfrac{1-(-1)^n}{2}$　n が奇数ならば $f''(-1)=1>0$　n が偶数ならば $f''(-1)=0$

いずれにしても、$-1\leqq x\leqq 1$において $f''(x)\geqq 0$ であり、$f'(x)$ は単調増加である。

$f'(1)=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}>0,\ f'(0)=0$ より、$f(x)$ の増減は右の通り。

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$x=0$のとき、$f(x)$ は極小値1をとる。

$n=1$のとき　$f(1)=f(-1)=\dfrac{3}{2}<2$

$n\geqq 2$のとき　奇数次の項は負であるから　$f(1)>f(-1)$

$$f(1)=1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2-\frac{1}{n+1}$$

したがって、$1\leqq f(x)\leqq 2-\dfrac{1}{n+1}$ であるから　$\therefore 1\leqq f(x)<2$　（証明終）