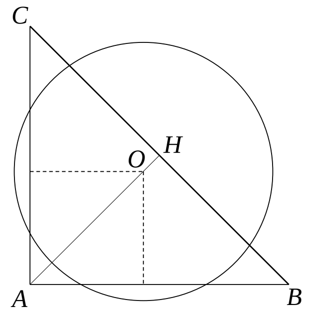
1975 年京大理 $\boxed{6}$

（i）



頂点 A が円 O の周より外部にあるためには　$x>1$

円 O の中心と、辺 $AB,\ AC$ までの距離は、$\dfrac{x}{\sqrt{2}}$ であるから

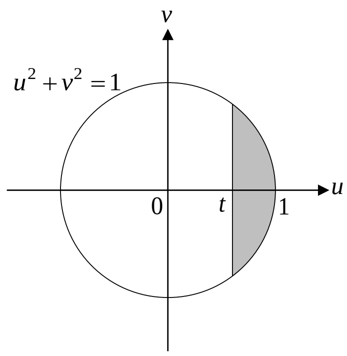
$$\frac{x}{\sqrt{2}}<1 \quad x<\sqrt{2} \quad \therefore 1<x<\sqrt{2} \text{ ——①}$$

円 O の中心と、辺 BC までの距離は、$\sqrt{2}-x$ であり、

の範囲で $\sqrt{2}-x<1$ を満たす。

以上により　$\therefore 1<x<\sqrt{2}$ ……(答)

（ii）



関数 $F(t)$ の値は、右図の網掛部の面積に等しい。

円 O が辺 $AB,\ AC$ からはみ出る部分の面積は等しく、$F\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$ で与えられる。

円 O が辺 BC からはみ出る部分の面積は、$F(\sqrt{2}-x)$ で与えられる。

円 O の面積は、π であるから　$\therefore S=\pi-2F\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)-F(\sqrt{2}-x)$ ……(答)

（iii）

$F'(u)=-2\sqrt{1-u^2}$ であるから

$$\frac{dS}{dx}=4\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+2\sqrt{1-(\sqrt{2}-x)^2}\cdot(-1)=2(\sqrt{2-x^2}-\sqrt{-1+2\sqrt{2}x-x^2})$$

$$=2\cdot\frac{(2-x^2)-(-1+2\sqrt{2}x-x^2)}{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{-1+2\sqrt{2}x-x^2}}=\frac{2(3-2\sqrt{2}x)}{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{-1+2\sqrt{2}x-x^2}} \text{ ……(答)}$$

S の増減は右の通りであるから、S を最大にする x は

$\therefore x=\dfrac{3}{4}\sqrt{2}$ ……(答)

x	1	$\cdots$	$\frac{3}{4}\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$\frac{dS}{dx}$		＋	0	－	
S		↗		↘	