1976 年京大理 $\boxed{4}$

（ii）

$a_n{}^3+3a_n{}^2-\left(9+\dfrac{1}{n}\right)a_n+5<0$ ——① が成り立つとき

$a_n{}^3+3a_n{}^2-9a_n+5=(a_n-1)^2(a_n+5)<\dfrac{a_n}{n}$　$(a_n-1)^2<\dfrac{a_n}{n(a_n+5)}$

$\dfrac{a_n}{n(a_n+5)}<\dfrac{1}{4n}$ とすると　$\dfrac{a_n}{a_n+5}<\dfrac{1}{4}$　$a_n<\dfrac{1}{4}a_n+\dfrac{5}{4}$　$\dfrac{3}{4}a_n<\dfrac{5}{4}$　$\therefore a_n<\dfrac{5}{3}$

①が成り立つとき、$a_n<\dfrac{5}{3}$ であることを示す。

$f(x)=x^3+3x^2-\left(9+\dfrac{1}{n}\right)x+5$ として、$x>0$ における増減を調べる。

$f'(x)=3x^2+6x-\left(9+\dfrac{1}{n}\right)=0$ を解くと、$x>0$ より　$x=\dfrac{1}{3}\left\{-3+\sqrt{9+3\left(9+\dfrac{1}{n}\right)}\right\}=-1+2\sqrt{1+\dfrac{1}{12n}}$

$\alpha=-1+2\sqrt{1+\dfrac{1}{12n}}$ とすると、増減は右の通り。

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↗

$f(1)=-\dfrac{1}{n}<0$ であり、$1<\alpha$ より　$0>f(1)>f(\alpha)$

$f(x)$ は $x\geqq\alpha$ において単調増加であり、$f\left(\dfrac{5}{3}\right)=\dfrac{125}{27}+\dfrac{75}{9}-\left(9+\dfrac{1}{n}\right)\dfrac{5}{3}+5=\dfrac{80n-45}{27n}>0$ であるから、

$\alpha<x<\dfrac{5}{3}$ において、$f(x)=0$ となる x が存在する。

すなわち、$f(x)<0$ を満たす x は、$x<\dfrac{5}{3}$ を満たすので　$\therefore a_n<\dfrac{5}{3}$

したがって、$\dfrac{a_n}{n(a_n+5)}<\dfrac{1}{4n}$ が示されたので　$\therefore (a_n-1)^2<\dfrac{1}{4n}$　（証明終）

（i）

$(a_n-1)^2<\dfrac{1}{4n}$ より　$-\dfrac{1}{2\sqrt{n}}<a_n-1<\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$　$1-\dfrac{1}{2\sqrt{n}}<a_n<1+\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

$n\to\infty$ のとき $\dfrac{1}{2\sqrt{n}}\to 0$ であるから、はさみうちの原理より　$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=1$　（証明終）

（注）

$(a_n-1)^2<\dfrac{a_n}{n(a_n+5)}<\dfrac{1}{n}$ であるから、（i）は（ii）を示さなくてもわかる。