1976年京大理 $\boxed{5}$

（i）

$h(x)=g(x)f\left(\frac{|x|}{a}\right)$ とする。$h(0)=g(0)f(0)=0$ であるから、条件（ハ）を満たす。

$|x|>a$ のとき、$\frac{|x|}{a}>1$ であり、$f\left(\frac{|x|}{a}\right)=1$ であるから、$h(x)=g(x)$ であり、条件（ニ）を満たす。

$h(x)$ が微分可能であることを示す。

$0<x<a$ のとき　$h(x)=g(x)f\left(\frac{x}{a}\right)$　　$h'(x)=g'(x)f\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{1}{a}g(x)f'\left(\frac{x}{a}\right)$

$-a<x<0$ のとき　$h(x)=g(x)f\left(-\frac{x}{a}\right)$　　$h'(x)=g'(x)f\left(-\frac{x}{a}\right)-\frac{1}{a}g(x)f'\left(-\frac{x}{a}\right)$

ここで、$f(x)$ は微分可能であるから　$\lim_{x\to+0}f'(x)=\lim_{x\to-0}f'(x),\ \lim_{x\to1+0}f'(x)=\lim_{x\to1-0}f'(x)$　　$\therefore f'(0)=f'(1)=0$

これより　$\lim_{x\to+0}h'(x)=\lim_{x\to-0}h'(x)=g'(0),\ \lim_{x\to-a+0}h'(x)=g'(-a),\ \lim_{x\to a-0}h'(x)=g'(a)$

$h'(0),\ h'(\pm a)$ が存在し、確かに微分可能であるから　$\therefore h(x)=g(x)f\left(\frac{|x|}{a}\right)$　……（答）

（ii）

$0<x<1$ のとき、$f(x)=\frac{1-\cos(\pi x)}{2}$ とすると　$\lim_{x\to+0}f(x)=0,\ \lim_{x\to1-0}f(x)=1$

$f'(x)=\frac{\pi}{2}\sin(\pi x)$ であるから　$\lim_{x\to+0}f'(x)=0,\ \lim_{x\to1-0}f'(x)=0$

$f'(0),\ f'(1)$ が存在し、確かに微分可能であるから、$f(x)=\begin{cases}0 & x\leqq0\\ \frac{1-\cos(\pi x)}{2} & 0<x<1\\ 1 & 1\leqq x\end{cases}$ は、条件（イ）を満たす。