1976年京大理$\boxed{1}$文$\boxed{1}$共通

(1)

$-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき、$0 \leqq |f(x)| \leqq \dfrac{1}{2^n}$ であり、$\dfrac{1}{2^n} < \dfrac{1}{1000}$ であればよいから　$\therefore 2^n > 1000$

$2^9 = 512 < 1000,\ 2^{10} = 1024 > 1000$ より、$n \geqq 10$ であればよい。……(答)

(2)

(1)より、$n \geqq 10$ のとき、$g(x) = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^n$ は、$0 \leqq x \leqq 1$ において $|g(x)| \leqq \dfrac{1}{1000}$ を満たす。

$g(3) = \left(\dfrac{5}{2}\right)^n$ より、$10000 < \left(\dfrac{5}{2}\right)^n < 100000$ となるような $n$ の範囲を考える。

$\dfrac{5}{2} = \dfrac{10}{4}$ より　$4^n \times 10^4 < 10^n < 4^n \times 10^5$　$10^{n-5} < 4^n < 10^{n-4}$ ——①

$4^{10} = 2^{20} = (2^{10})^2 = 1048576 > 10^6$ であるから、$n = 10$ のとき①は不成立。

$4^{11} = 4194304$ であるから、$10^6 < 4^{11} < 10^7$ であり、$n = 11$ のとき①は成立。

以上により、$g(x)$ の例の1つは　$g(x) = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^{11}$ ……(答)

(注)

$\log_{10} 2 = 0.301$ を既知とすれば、$10000 < \left(\dfrac{5}{2}\right)^n < 100000$ の各辺の常用対数をとると

$$4 < n(1 - 2\log_{10} 2) < 5 \quad 4 < n \times 0.398 < 5 \quad \frac{4}{0.398} < n < \frac{5}{0.398} \quad 10.05\cdots < n < 12.56\cdots$$

したがって、$n = 11$ または $n = 12$ とすればよい。