1976 年京大理$\boxed{2}$文$\boxed{2}$共通

(i)

S に属するベクトル$\vec{a}, \vec{b}$ がなす角を、θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ とする。

$\dfrac{2\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}} = \dfrac{2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}{|\vec{b}||\vec{b}|} = \dfrac{2|\vec{a}|\cos\theta}{|\vec{b}|}$ は、整数である。 $\dfrac{2\vec{b}\cdot\vec{a}}{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \dfrac{2|\vec{b}||\vec{a}|\cos\theta}{|\vec{a}||\vec{a}|} = \dfrac{2|\vec{b}|\cos\theta}{|\vec{a}|}$ は、整数である。

これらの積 $\dfrac{2|\vec{a}|\cos\theta}{|\vec{b}|}\cdot\dfrac{2|\vec{b}|\cos\theta}{|\vec{a}|} = 4\cos^2\theta$ も、整数である。

$0 \leqq 4\cos^2\theta \leqq 4$ であるから、考えられるのは

$4\cos^2\theta = 0, 1, 2, 3, 4 \quad \cos^2\theta = 0, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}, 1 \quad \therefore \cos\theta = 0, \pm\dfrac{1}{2}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \pm 1$

以上により、θ は $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ およびこれらの補角のうちの 1 つである。(証明終)

(ii)

n を整数として $\dfrac{2|\vec{a}|\cos\theta}{|\vec{b}|} = n$ とすると、$\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} = \dfrac{2\cos\theta}{n}$ であり、$\dfrac{2|\vec{b}|\cos\theta}{|\vec{a}|} = \dfrac{4\cos^2\theta}{n}$ は整数である。

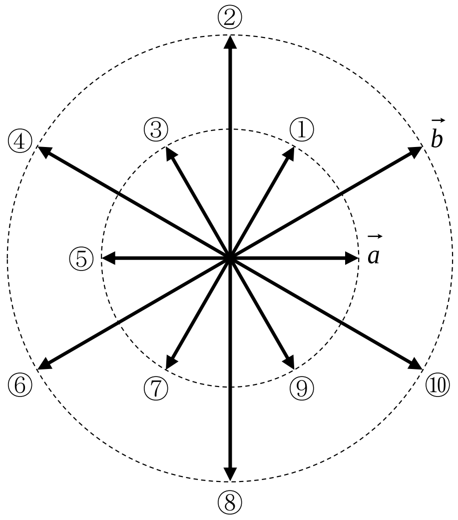
$\theta = 0^\circ$ のとき $\dfrac{4}{n}$ は整数であるから $n = \dfrac{2|\vec{a}|}{|\vec{b}|} = 1, 2, 4$ $\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} = \dfrac{1}{2}, 1, 2$ 長さの比は、$1:1$ または $1:2$ ……(答)

$\theta = 30^\circ$ のとき $\dfrac{3}{n}$ は整数であるから $n = \dfrac{\sqrt{3}|\vec{a}|}{|\vec{b}|} = 1, 3$ $\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}$ 長さの比は、$1:\sqrt{3}$ ……(答)

$\theta = 60^\circ$ のとき $\dfrac{1}{n}$ は整数であるから $n = \dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} = 1$ 長さの比は、$1:1$ ……(答)

(iii)

右図のように、30° をなすベクトル同士の長さの比は $1:\sqrt{3}$ に、
60° をなすベクトル同士の長さの比は $1:1$ になるように、
12 個のベクトルを並べれば、題意を満たす。



ベクトル①～⑩を、$\vec{a}, \vec{b}$ で表すと、下の通り。

① $-\vec{a}+\vec{b}$ ② $-3\vec{a}+2\vec{b}$ ③ $-2\vec{a}+\vec{b}$ ④ $-3\vec{a}+\vec{b}$ ⑤ $-\vec{a}$

⑥ $-\vec{b}$ ⑦ $\vec{a}-\vec{b}$ ⑧ $3\vec{a}-2\vec{b}$ ⑨ $2\vec{a}-\vec{b}$ ⑩ $3\vec{a}-\vec{b}$