1976年京大理$\boxed{3}$文$\boxed{3}$共通

$f(x)$の次数を$n$とすると、$f(x)f'(x)$は$2n-1$次、$\int_1^x f(t)dt$は$n+1$次である。

$2n-1>n+1$　$n\geqq 3$のとき

$f(x)f'(x)+\int_1^x f(t)dt$の次数は$2n-1\geqq 5$であり、1にはならないので不適。

$n\leqq 2$であるから、$f(x)=ax^2+bx+c$とすると

$$f'(x)=2ax+b \qquad \int_1^x f(t)dt=\left[\frac{a}{3}t^3+\frac{b}{2}t^2+ct\right]_1^x=\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx-\frac{a}{3}-\frac{b}{2}-c$$

$$\begin{aligned}f(x)f'(x)+\int_1^x f(t)dt&=(ax^2+bx+c)(2ax+b)+\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx-\frac{a}{3}-\frac{b}{2}-c\\&=2a^2x^3+3abx^2+(b^2+2ca)x+bc+\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx-\frac{a}{3}-\frac{b}{2}-c\\&=\left(2a^2+\frac{a}{3}\right)x^3+b\left(3a+\frac{1}{2}\right)x^2+(b^2+2ca+c)x+bc-\frac{a}{3}-\frac{b}{2}-c=\frac{4}{9}x-\frac{4}{9}\end{aligned}$$

係数を比較して

$$2a\left(a+\frac{1}{6}\right)=0 \text{ ——①} \quad b\left(a+\frac{1}{6}\right)=0 \text{ ——②} \quad b^2+2ca+c=\frac{4}{9} \text{ ——③} \quad bc-\frac{a}{3}-\frac{b}{2}-c=-\frac{4}{9} \text{ ——④}$$

①より　$a=0,\ -\frac{1}{6}$

$a=0$のとき　②より　$b=0$　③、④より　$c=\frac{4}{9}$

$a=-\frac{1}{6}$のとき　②も成立する。③より　$b^2+\frac{2}{3}c=\frac{4}{9}$　$c=-\frac{3}{2}b^2+\frac{2}{3}$

④に代入して

$$-\frac{3}{2}b^3+\frac{2}{3}b+\frac{1}{18}-\frac{b}{2}+\frac{3}{2}b^2-\frac{2}{3}=-\frac{4}{9} \qquad \frac{3}{2}b^3-\frac{3}{2}b^2-\frac{1}{6}b+\frac{1}{6}=0 \qquad 9b^3-9b^2-b+1=0$$

$$(b-1)(9b^2-1)=0 \qquad (b-1)(3b+1)(3b-1)=0 \qquad \therefore b=1,\ \pm\frac{1}{3}$$

$b=1$のとき　$c=-\frac{3}{2}+\frac{2}{3}=-\frac{5}{6}$　$b=\pm\frac{1}{3}$のとき　$c=-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{9}+\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$

以上により　$\therefore f(x)=\frac{4}{9},\ -\frac{1}{6}x^2+x-\frac{5}{6},\ -\frac{1}{6}x^2\pm\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}$ ……(答)